

**Orfebres de ideas,  
entre átomos y estrellas**

**Antonio Córdoba Barba**

**Murcia, septiembre de 2017**



Excmo. Sr. Presidente de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, Magcos. Sres. Rectores de las universidades de Murcia y Politécnica de Cartagena, Sres. Presidentes de los Consejos Sociales de las Universidades de Murcia y Politécnica de Cartagena, Sres. Secretarios Generales, Sras. y Sres. Vicerrectores, Sras. y Sres. Decanos, Sras. y Sres. claustrales de la Universidad de Murcia, Excmas. e Ilmas. autoridades, Sras. y Sres.

Tengo unas sólidas raíces murcianas que me hacen sentir profundamente conmovido por el honor que hoy me otorga la Universidad de Murcia. Estoy muy agradecido a su Claustro y, muy especialmente, al profesor Ángel Ferrández, excelente geómetra y amigo, por haber tomado la iniciativa en la propuesta y por las palabras tan cálidas y tan amablemente exageradas que ha pronunciado sobre mi obra.

Como el doctor sueco protagonista de la película “Fresas salvajes” de Ingmar Bergman, que viaja para ser homenajeado en la Universidad de Lund, también yo he recorrido en automóvil el camino a Murcia desde mi casa de Madrid. Y durante el trayecto, emulando tal vez el relato del filme, no he podido evitar abrir una puerta a la nostalgia: a esos recuerdos de mi infancia asociados a la huerta murciana durante los años cincuenta y primeros sesenta del siglo pasado, que, en la memoria sesgada del niño que yo era entonces, brilla como una luminosa Arcadia feliz.

Mis padres poseían un huerto de flores situado a medio camino entre el pueblo de Puente Tocinos y las Puertas de Orihuela, recorrido que yo realizaba varias veces al día durante los siete años del bachillerato que cursé en el Instituto Alfonso X El Sabio. Aquella fue una etapa muy importante de mi vida y de mi formación, sin la cual resultaría inexplicable la decisión de convertirme en el profesor e investigador matemático que ustedes, en este acto, tan generosamente homenajean.

No sabría precisar ahora cómo ocurrió, pero me sentía fascinado por la Mecánica Cuántica y la Relatividad, el universo de los átomos y de los viajes espaciales. Devoraba todos los libros sobre esos temas que estaban a mi alcance, mayormente en la biblioteca de la Casa de la Cultura. Pero, sin que pueda explicarme del todo el porqué, yo ya deseaba entonces entender la Física y la Química desde los primeros principios y, para eso, enseguida comprendí que dominar el lenguaje matemático era un requisito ineludible. Por otro lado, las Matemáticas

me daban una sensación de seguridad, porque cuando lograba armar una demostración, o resolver un problema, no necesitaba creer en nada ajeno a mi propio razonamiento, ni solicitar la aprobación de autoridad alguna.

Ahora, más que nunca, las Matemáticas son indispensables para entender el mundo en el que vivimos, y su rango de aplicaciones incluye desde la tecnología más puntera hasta asuntos tan cotidianos como es la asignación del NIF, nuestra contraseña en internet o la rapidez con la que nos hacen la cuenta en el supermercado a través de los códigos de barras. Según una opinión extendida, nos encontramos en los albores de la IV revolución industrial, en la que la palabra clave es “algoritmo” y donde el centauro que forma un matemático con su ordenador es, quizás, el espécimen más evolucionado y eficiente para la ciencia y la tecnología. Por lo que no sorprende que sea uno de los perfiles profesionales más valorados, como reflejan las altas calificaciones que son necesarias para entrar en las carreras universitarias de Física y Matemáticas. Pero en mi época de bachiller el panorama era distinto, y las ingenierías representaban las opciones más atractivas para los mejores expedientes.

Sin embargo, yo quería ser un científico y decidí estudiar Matemáticas. La Universidad de Murcia no contaba en aquel tiempo con esa licenciatura, por lo que mi relación con la institución que hoy me honra se redujo entonces al examen que hacíamos al final del curso preuniversitario. Recuerdo que tuvo lugar en un caluroso día del mes de julio lo que, tratándose de calor en nuestra tierra, todos sabemos que es mucho decir. Dentro del recinto universitario se imponían unas normas de atuendo muy estrictas, que exigían a los varones vestir con chaqueta y corbata. Y así lo hicimos estoicamente los varios cientos de preuniversitarios citados para aquella prueba durante el examen de la mañana. Pero la situación por la tarde se volvió insostenible, de manera que uno de mis compañeros preguntó al presidente del tribunal, a la sazón el profesor Juan Sancho, catedrático de Química Física, si podríamos quitarnos la chaqueta. A lo que don Juan, con una cierta socarronería y sentido del humor, respondió que “Sí, claro, pero cada uno la suya”.

Precisamente Sancho se trasladó al poco tiempo a la Universidad Autónoma de Madrid, centro en el que ha transcurrido gran parte de mi carrera universitaria. Él contribuyó a crear la Sección de Químicas de la Facultad de Ciencias, igual que yo haría, años más tarde,

respecto a la Sección de Matemáticas. En una ocasión ambos coincidimos en un tribunal de tesis doctoral que trataba de cálculos mecano-cuánticos. Don Juan se acordaba de mí, de aquel estudiante del Alfonso X tan osado que pretendía entender las matemáticas de los átomos, pero no recordaba la anécdota que les acabo de relatar.

La osadía que sí recordaba don Juan se remonta al año 1966, cuando la Caja de Ahorros del Sureste de España, en colaboración con la universidad y los institutos de la región, creó el premio Juan de la Cierva para un ensayo científico escrito por estudiantes del curso Preuniversitario. El trabajo tenía que ser expuesto en público y defendido ante un tribunal de profesores. El que yo presenté, titulado “El átomo a través de algunos de sus modelos”, resultó ganador.

A pesar de los más de cincuenta años transcurridos desde su escritura, he logrado encontrar entre mis papeles un ejemplar de aquel ensayo. Naturalmente se trata de un trabajo de erudición, sin pretensión alguna de originalidad, pero que da testimonio fehaciente de por dónde andaba entonces mi curiosidad intelectual. Después de mencionar someramente las contribuciones de, entre otros, Leucipo, Demócrito, Dalton, Rutherford y Bohr, escribí lo siguiente:

*Las limitaciones de estas teorías llevaron al desarrollo de un modelo atómico fundado en la premisa de que el comportamiento de los núcleos y los electrones puede ser descrito mediante ecuaciones matemáticas.*

*Eso lo llevó a cabo E. Schrödinger, quien propuso una ecuación que regula la evolución del estado del electrón en el átomo de hidrógeno, a través de la función de ondas que mide la probabilidad de que el electrón se encuentre en una cierta región del espacio. En coordenadas esféricas, el método de separación de variables la descompone en dos (una radial y otra angular), donde aparecen unos parámetros discretos, llamados autovalores, que coinciden con los números cuánticos del modelo de Bohr.*

*La ecuación de Schrödinger puede, en principio, ser usada para obtener descripciones completas, matemáticas, del comportamiento de todos los sistemas de electrones y núcleos. En la práctica, no obstante, surgen dificultades tan enormes que sólo se han podido superar en el caso de los átomos de Hidrógeno y de Helio.*

*Los químicos disponen de diversas teorías fenomenológicas que permiten dar una explicación del Sistema Periódico. Pero el proyecto de que la Química sea “more geometrico demonstrata” parece todavía muy lejano.*

Comprendo perfectamente la impresión que pueda sacarse sobre lo pretencioso y pelín pedante que debía ser el joven de 16 años capaz de escribir esas líneas. Digamos en su descargo que también formaba parte del equipo de fútbol juvenil del Real Murcia y que, en plena eclosión hormonal, no era inmune a la belleza que tanto se ve realzada en esos días azules, cuando los naranjos y limoneros de la huerta trasminan el perfume del azahar

Ese mismo año, a muchos kilómetros de distancia, otro joven de la misma edad, Charles Fefferman, iniciaba sus estudios de doctorado en la Universidad de Princeton, culminados dos años más tarde con una brillante e innovadora tesis que revolucionó el Análisis Armónico. Antes había pasado directamente de la escuela primaria a la Universidad de Maryland, y de allí al programa de doctorado de Princeton cuando apenas contaba 17 años de edad. La carrera de Fefferman (mi amigo Charlie) ha sido espectacular, tanto por la variedad como por la profundidad de sus resultados y por los merecidos premios y reconocimientos que le han sido otorgados.

Quién me iba a decir entonces que, junto a Charles Fefferman y Luis Seco, un estudiante común de ambos, íbamos a retomar años más tarde en la Universidad de Princeton aquel ensueño de mi infancia: deducir matemáticamente, a partir de las leyes fundamentales de la Mecánica Cuántica, las propiedades de los elementos químicos. Un paso indispensable en ese empeño es conocer el desarrollo asintótico de la energía del estado fundamental de un átomo. Descubrimos que más allá de sus primeros términos, llamados de Thomas-Fermi, Scott y Schwinger-Dirac, que son potencias decrecientes del número atómico, aparece otro de carácter oscilatorio como excelente candidato para explicar las propiedades periódicas de la tabla. “A trigonometric sum relevant to the non-relativistic theory of atoms”, “Weyl Sums and atomic energies oscillations” o “A number-theoretic estimate for the Thomas-Fermi density” son títulos de algunos de nuestros trabajos, publicados en revistas prestigiosas como es la de la Academia de Ciencias de Estados Unidos. En ellos fuimos plasmando nuestros avances en un ambicioso plan que está todavía vigente y del que queda mucho por hacer.

El centauro (matemático + ordenador) también desempeñó un papel decisivo en nuestro análisis, por cuanto tuvimos que efectuar un cálculo muy complejo, basado en la precisión de la aritmética de intervalos, que nos garantizaba la positividad de la derivada segunda de la fase de una integral oscilatoria, pieza indispensable de la demostración. Pero, en aquella época, usar un programa de ordenador dentro de una prueba matemática estricta era algo novedoso que implicaba una interesante evolución del concepto de verdad y demostración matemática. Por lo que en este asunto, con nuestro teorema, pasamos también a formar parte del grupo de los pioneros.

Los matemáticos somos por naturaleza reduccionistas y consideramos que el conocimiento de las leyes o ecuaciones fundamentales, junto a la posesión de los instrumentos analíticos adecuados, nos permitirá explicar el mundo que nos rodea. La escuela pitagórica (siglo VI AC) creía literalmente que los números eran los componentes últimos del Universo, los ingredientes efectivos de todos los objetos materiales. Eso nos parece ahora un tanto exagerado, pero a aquellos maravillosos griegos les impulsó a realizar descubrimientos aritméticos fundamentales y a formular problemas y conjeturas plausibles, algunas de las cuales constituyen todavía un desafío al ingenio humano.

Si bien la filosofía reduccionista puede considerarse tan radical como lo fue el pitagorismo, lo cierto es que las diversas teorías matemáticas, pálidas aproximaciones a la ensoñada teoría del todo, describen bastante bien determinados aspectos de nuestro entorno físico-químico.

Uno de los problemas a los que se enfrenta la teoría cuántica es la explicación de los fenómenos cualitativos: ¿por qué es la materia estable y eléctricamente neutra? ¿Por qué algunos elementos forman moléculas, mientras que otros, los gases nobles, permanecen en forma atómica? Si el Universo empezara de nuevo, y tuviésemos una sopa de electrones y protones, ¿se formarían átomos? Si no nos conformamos con explicaciones fenomenológicas, y buscamos una deducción matemática a partir de los primeros principios, nos toparemos de lleno con su enorme dificultad intrínseca y con la inmensa cantidad de ideas y herramientas que su respuesta involucra.

Esta característica de las Matemáticas, que el criterio de certeza viene dictado únicamente por la deducción rigurosa y lógica, las distingue principalmente del resto de las ciencias.

También permite arrojar luz a todas ellas: cuando un científico analiza sus experimentos, hace cálculos, interpretaciones fenomenológicas y predicciones, es frecuente que utilice las Matemáticas de manera fundamental, incluso bastante sofisticadas. Nadie discute ese valioso papel que desempeñan en la Ingeniería, la Física, la Química, la Economía o la Biología. Pero la aportación más importante de las Matemáticas a la dinámica científica, desde hace ya varios siglos, ha sido explicar, dentro de su cohesión interna, las bases sobre las que edificar teorías ya conocidas. Y es precisamente esa función la que ha producido los más variados y sabrosos frutos a lo largo de la historia.

Al estudiar las propiedades de los elementos químicos, Fefferman, Seco y yo nos encontramos con un tema clásico de la teoría de los números: el problema llamado del círculo y el retículo. Consiste en contar cuántos puntos de coordenadas enteras caen dentro de un círculo de radio muy grande. Supongamos que estamos en un plano que hemos enlosado con baldosas cuadradas de lado 1 decímetro. Los centros de las baldosas forman el retículo de puntos de coordenadas enteras (si hemos elegido uno de ellos como el origen de un sistema adecuado de coordenadas cartesianas y adoptado el decímetro como unidad de longitud).

Con centro en ese origen tracemos un círculo de radio muy grande (un kilómetro, por ejemplo) y preguntémosnos: ¿cuántos puntos del retículo caen dentro de ese círculo? Contarlos directamente exige un gran esfuerzo, ya que son más de 314 millones y habría muchísimos más (billones o incluso trillones) si el radio fuese ahora de 10, 100 o 1000 kilómetros.

Contar puntos del retículo es equivalente a contar baldosas. La unión de todas las baldosas cuyos centros están dentro del círculo tiene un área, en decímetros cuadrados, igual al número buscado.

Cuando el radio se hace muy grande, la región de las baldosas y el círculo se solapan mucho, casi coinciden, pero no son exactamente iguales, y esto se hace patente en la frontera del círculo, donde hay zonas sobrepasadas por las baldosas y otras que estas no llegan a cubrir.

El gran Gauss, a mediados del siglo XIX, se dio cuenta de la importancia que este cálculo tiene en varias teorías aritméticas y observó que, efectivamente, el número de puntos reticulares dentro del círculo está bien aproximado por su área y que el error relativo, producido



por ese desajuste en la frontera, está controlado por el cociente entre la longitud y el área, es decir, tiene el orden de  $1/\text{Radio}$ , que se hace muy pequeño cuando este crece.

Ahora bien, ¿podemos mejorar el tamaño del error relativo?, ¿cuál es la estimación óptima?

A pesar de la sencillez del enunciado, se trata de un problema muy relevante dentro de la Teoría de los Números, cuya respuesta precisa todavía desconocemos. Pero en el empeño de encontrarla se han creado, y afilado, instrumentos matemáticos muy interesantes: a través de la llamada transformación de Fourier, contar puntos se convierte en contar ondas, permitiendo obtener una expresión precisa del error relativo en forma de serie trigonométrica y utilizar resultados profundos del Análisis Armónico para mejorar las sencillas estimaciones de Gauss.

Estamos ante una interesante encrucijada, en la que un problema aritmético básico se entrelaza con las ecuaciones del campo electromagnético y la teoría de la difracción de la luz. Y fue precisamente, siguiendo su estela, como Fefferman, Seco y yo pudimos demostrar el carácter oscilatorio, casi periódico, de ese término del desarrollo asintótico de la energía de los átomos que he mencionado. Pero de las musas al teatro hay un largo trecho y no creo que fuera apropiado ahora insistir en los detalles de la demostración. Digamos, no obstante, que cuando finalmente logramos entenderlo, resultó que el término oscilatorio de la energía atómica era menos arisco que el del problema básico de la Teoría de los Números, que aún sigue abierto a pesar de la cantidad y calidad de los matemáticos que lo han abordado.

Entre ellos se encuentra el profesor de la UAM y miembro del ICMAT Fernando Chamizo, quien en la tesis que escribió bajo mi dirección logró un resultado que, durante algunos años, fue lo que podríamos llamar el “record del mundo” en la versión tridimensional del problema. Otro caso interesante es el del célebre matemático chino Chen Jingrun, que también fue record mundial en años anteriores a Fernando y a quien conocí en Princeton, a finales de los 70 del siglo pasado. Yo era entonces un joven profesor de esa universidad, al tiempo que Chen visitaba el Institute for Advanced Study bajo los auspicios de la apertura política propiciada por Deng Xiaoping, dentro de lo que entonces se denominaba “diplomacia del ping-pong” entre China y Estados Unidos.

En sus visitas a mi despacho Chen venía siempre acompañado por un personaje que permanecía en silencio, en una esquina, mientras nosotros hablábamos. Nunca le pregunté directamente, pero era evidente que se trataba de un comisario político asignado para controlarle, a pesar de que Chen, en esos momentos, era una especie de héroe científico en su país por haber sufrido los estragos de la “revolución cultural”, en cuyos tiempos fue perseguido y expulsado de la universidad. Le acusaban de investigar sobre la Teoría de los Números, materia catalogada por aquellos fanáticos como “matemática burguesa alejada de los verdaderos intereses del pueblo”.

Es bien sabido que los Elementos de Euclides son un compendio de la matemática griega del periodo alejandrino. Y, entre sus muchos méritos, está la presentación del método axiomático deductivo: a partir de unas pocas proposiciones de naturaleza evidente se ha de deducir todo lo demás. Entre los axiomas planteados por Euclides para la geometría había uno, llamado de las paralelas, que desde un principio pareció menos obvio. Dice así: por un punto exterior a una recta sólo podemos trazarle una paralela. Por qué a los griegos les resultaba menos evidente que los otros es un misterio: podríamos pensar que en un mundo tan pequeño como era el de la Grecia clásica, donde viajar era arriesgado y donde no estaba nada claro en qué consistían los límites del mundo conocido, un axioma cuya verificación implicaba largas distancias fuera sospechoso.

Carecemos de testimonio escrito que respalde estas elucubraciones, pero la realidad es que durante muchos siglos se creyó poder usar la navaja de Ockham y encontrar una demostración de este axioma a partir de los demás. El mismo Kant, tan perspicaz en otros asuntos, erró clamorosamente en éste afirmando que la euclídea era la única geometría posible, ganándose con ello la burla de su coetáneo Gauss, quien ya conocía la existencia de otros espacios donde se cumplen el resto de los axiomas de Euclides, pero no el de las paralelas.

Se trata, no obstante, de un momento estelar de la ciencia, que dio lugar a una nueva concepción del espacio y del tiempo. Y que requirió la introducción de conceptos tales como curvatura o líneas geodésicas, propiciando la aparición de nuevos espacios con propiedades sorprendentes. Fueron creaciones geniales de Gauss y Riemann, elaboradas luego por Minkowski, Poincaré y, sobre todo, por Einstein en su Teoría General de la Relatividad, que dieron lugar

a un replanteamiento moderno de las cuestiones formuladas por aquellos griegos geniales: ¿Cuál es, o cuáles son, las geometrías del Universo? Se trata de una pregunta fácil de formular que tiene una respuesta compleja y, hoy por hoy, incompleta. Pero que pone de manifiesto el papel que desempeña en la dinámica científica el afán matemático de entender en profundidad asuntos de aspecto sencillo, casi ingenuo, como puede parecer a simple vista el axioma de las paralelas.

Empero, el problema del círculo y el retículo viene otra vez a colación. En geometrías distintas de la euclídea también sabemos medir distancias y ángulos, trazar círculos y obtener teselaciones, con teselas o baldosas adecuadas, como las que dibujó Maurits Escher en sus célebres grabados. Y puede ocurrir, por ejemplo, que en un tipo de geometría el número de baldosas cerca de la frontera del círculo sea similar al número de baldosas que están en el interior. En otras palabras, en un país con tal geometría la longitud de sus costas podría ser parecida al área de su interior (como ocurre con Chile y Noruega, aunque por razones distintas). En este caso, el error cometido al contar puntos del retículo sería comparable al área, por lo que nuestro método resultaría ser completamente inútil.

Gauss desarrolló sus ideas geométricas no euclídeas a partir del encargo de elaborar mapas precisos del estado de Hannover. Estableció un retículo de puntos, vértices de las triangulaciones en las que basó sus medidas, y planteó la cuestión teórica de cómo un ser bidimensional pudiera llegar a conocer el tipo de geometría del terreno, plana o curvada, sin más que observar las propiedades del retículo.

Aumentando el número de dimensiones podemos, siguiendo a Gauss, utilizar estas ideas para estudiar el Universo, sin más que reemplazar puntos del retículo por estrellas y esferas grandes por galaxias. El problema se hace mucho más complejo, sin duda alguna, pero las cuestiones fundamentales permanecen. Tendríamos que contar estrellas en galaxias, próximas y lejanas, medir distancias, ángulos, y entender su distribución para inferir en qué tipo de geometría vivimos. Se trata de algo muy complicado, por supuesto, pero hay algunos indicios de que a distancias cortas (en términos astronómicos) la geometría es plana, euclídea, mientras que a distancias mayores, intergalácticas, parecen indicar que no es así.

En esta breve exposición he tenido la pretensión, quizás exagerada, de mostrarles uno de

mis problemas aritméticos favoritos, el varias veces mencionado del círculo y el retículo. Subrayando cómo una cuestión tan sencilla aparece en asuntos tan dispares, desde lo atómico a lo galáctico. Si me preguntaran, no obstante, por la razón profunda de esa presencia, tendría que confesar mi ignorancia. Pero creo que ilustra muy bien algo que he aprendido a lo largo de mi carrera: en el empeño de explicar la naturaleza de un modo matemático, preguntas básicas, de ubicuidad asombrosa, seguirán planteando desafíos al ingenio humano. Las astucias de la razón y las ideas novedosas que han sido creadas para darles respuesta, han hecho avanzar nuestro conocimiento y dominio del universo. La reflexión sobre problemas matemáticos fundamentales ha sido, y lo sigue siendo, un método muy valioso de investigación científica.

Termino como empecé, agradeciendo a la Universidad de Murcia el honor otorgado a quien

Solo pretende ser orfebre de ideas,  
engarzándolas en bellas cadenas  
que venzan el paso del tiempo.  
Y a ese empeño dedica sus horas,  
buscando la plata y el oro,  
ocultos, como esquivo tesoro,  
en un dédalo de números y fórmulas.