Una visión intuitiva de la Geometría Diferencial

Un menú muy apetitoso

Entrantes : **Curvas**

Plato principal : **Superficies**

Postre : **Variedades**

Angel Ferrández

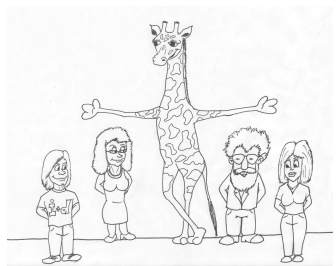
Home page: `webs.um.es/aferr`

Grupo de Geometría Diferencial y Convexa

Web page: `www.um.es/geometria`

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas



1. Los entrantes: Curvas en el espacio

Definición de curva. *Una curva* en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), a_2(t), \alpha_3(t)) \,,$$

con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, donde las funciones $\alpha_i(t)$ admiten derivadas continuas de todos los órdenes.

Vector velocidad o vector tangente. Es la aplicación

$$\alpha' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \,.$$

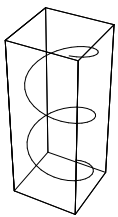
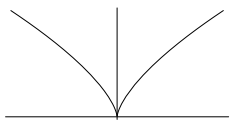
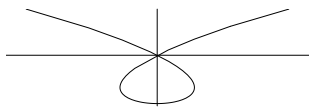
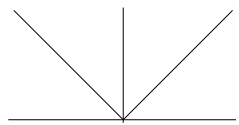
Nota. $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, con $I \subset \mathbb{R}$ abierto, llamaremos *curva plana*.

Ejemplos. (1) $\alpha(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t, b\, t)$, con $a, b > 0$, es la *hélice cilíndrica*.

(2) $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, es diferenciable, pero $\alpha'(0) = (0,0)$: el vector velocidad en $t = 0$ existe, aunque no tiene dirección. Ésta es una de las situaciones que excluiremos en nuestro estudio de las curvas.

(3) $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Claramente, α no es inyectiva, pues $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0,0)$: se dice entonces que $\alpha(t)$ no es simple.

(4) $\alpha(t) = (t, |t|)$, no es diferenciable; no contemplaremos en nuestro estudio.

¿Por qué tanto interés en que nuestra curva sea diferenciable? ¿Por qué queremos evitar que el vector tangente se anule en un punto? La respuesta está implícita en la siguiente definición.

Curva regular. Se dice que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Si $\alpha'(t) \neq 0$, podemos considerar la recta tangente a α en el punto $\alpha(t)$, es decir, la recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $\alpha'(t)$ (aquí es esencial que la curva sea regular).

Si por el contrario $t_0 \in I$ es tal que $\alpha'(t_0) = 0$, se dice entonces que α presenta un punto singular en t_0.

Sólo estudiaremos curvas simples y regulares.

1.1. La función longitud de arco

Cambio de parámetro. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva. *Un cambio de parámetro* es cualquier aplicación diferenciable

$$h : J \to I,$$

$J \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, con inversa h^{-1} es también diferenciable.

La curva $\beta = \alpha \circ h : J \to I \to \mathbb{R}^3$ se llama *reparametrización* de α.

Ejemplo. Tome la circunferenccia $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces $h(s) = 2s$ conserva la orientación, mientras que $h(s) = -s$ la invierte.

La longitud de arco.

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

Una parametrización destacada. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se dice *parametrizada por la longitud de arco* si $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Nota. En ese caso

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t |\alpha'(u)|\, du = \int_0^t du = t.$$

Un resultado fundamental. Toda curva regular puede ser parametrizada por la longitud de arco.

Ejemplo. $\alpha(t) = (t, \cosh t)$: la catenaria. Su parámetro arco es

$$s = \int_0^t |\alpha'(u)|\, du = \int_0^t \cosh u\, du = \operatorname{senh} u.$$

1.2. La curvatura, la torsión y el triedro de Frenet

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Su vector tangente $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$ es unitario, es decir, $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'(s) \perp \alpha'(s)$.

Curvatura. Se define entonces la *curvatura* de α en un punto $\alpha(s)$ como

$$k(s) = |\mathbf{T}'(s)| = |\alpha''(s)|.$$

Nota. $k(s) \geq 0$. Además, α es una línea recta si, y sólo si, su curvatura $k(s) \equiv 0$.

Vector normal. Sea α una curva regular p.p.a. Para todo $s \in I$ tal que $k(s) \neq 0$, se define el ***vector normal*** (unitario) a α en $\alpha(s)$ como

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{k(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}.$$

Plano osculador. Si α es regular p.p.a. tal que $k(s) \neq 0$, para todo $s \in I$, se denomina *plano osculador* en $\alpha(s)$ al plano $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$.

A partir de ahora supondremos que $k(s) \neq 0$ en todo punto.

Vector binormal. $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$.

Entonces $|\mathbf{B}(s)| = 1$ y es ortogonal al plano osculador.

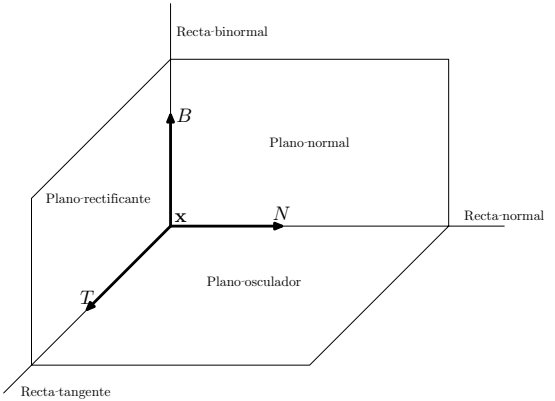
Triedro de Frenet. Para todo $s \in I$, con $k(s) > 0$, el conjunto $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, denominada *triedro de Frenet*.

Una cuestión importante. ¿Cómo varían los vectores $\mathbf{T}(\mathbf{s})$, $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{s})$ a lo largo de $\alpha(s)$?

$\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s)$

$\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) \Rightarrow \mathbf{B}'(s) \perp \mathbf{T}(s)$

$|\mathbf{B}(s)| = 1 \Rightarrow \mathbf{B}'(s) \perp \mathbf{B}(s)$



En consecuencia, $\mathbf{B}'(s)$ y $\mathbf{N}(s)$ deben ser colineales. Así

$$\mathbf{B}'(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \mathbf{N}(s) = \langle \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \mathbf{N}(s).$$

El factor que aparece en la fórmula anterior nos lleva a la siguiente definición.

Torsión. Es la función $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tau(s) := \langle \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle.$$

Fórmulas de Frenet.

$\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s)$.

$\mathbf{N}'(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s) + \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s)\rangle \mathbf{B}(s)$, y dado que

- $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s)\rangle = 0$ (derivando la relación $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s)\rangle = 1$),
- $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{T}(s)\rangle = -\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}'(s)\rangle = -k(s)$ (derivando $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s)\rangle = 0$) y
- $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s)\rangle = -\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}'(s) = -\tau(s)$ (derivando $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\rangle = 0$),

se tiene finalmente que $\mathbf{N}'(s) = -k(s)\mathbf{T}(s) - \tau(s)\mathbf{B}(s)$. En definitiva, hemos obtenido

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{T}'(s) & = & k(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) & = & -k(s)\mathbf{T}(s) \qquad -\tau(s)\mathbf{B}(s), \\ \mathbf{B}'(s) & = & \tau(s)\mathbf{N}(s). \end{array} \right.$$

Proposición. Una curva $\alpha(s)$ con curvatura $k(s) \neq 0$ es plana si, y sólo si, su torsión es nula.

Obsérvese que, si la curvatura $k(s) \equiv 0$, entonces α es una recta, y por tanto siempre es una curva plana. Este caso se excluye en el enunciado de la proposición porque, si $k(s) = 0$, la torsión no puede definirse, y el resultado no tendría sentido.

Ejemplo. Sea α la hélice cilíndrica $\alpha(s) = (a\cos s, a\operatorname{sen} s, bs)$, $a, b > 0$, que suponemos p.p.a. (luego, $|\alpha'(s)|^2 = |(-a\operatorname{sen} s, a\cos s, b)|^2 = a^2 + b^2 = 1$).

Triedro de Frenet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(s) &= (-a\operatorname{sen} s, a\cos s, b),\\
\mathbf{N}(s) &= (-\cos s, -\operatorname{sen} s, 0),\\
\mathbf{B}(s) &= (b\operatorname{sen} s, -b\cos s, a).
\end{aligned}$$

Curvatura: $k(s) = |\alpha''(s)| = |(-a\cos s, -a\operatorname{sen} s, 0)| = a$

Torsión: $\tau(s) = \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}'(s)\rangle = -b$.

Resumen.

$$\begin{aligned}
k(s) &: \text{ mide cuánto se aleja } \alpha \text{ de ser recta}\\
\tau(s) &: \text{ mide cuánto se aleja } \alpha \text{ de ser plana}
\end{aligned}$$

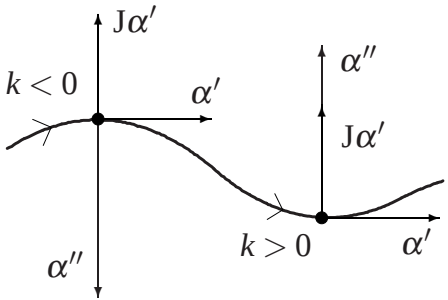
Caso de una curva plana.

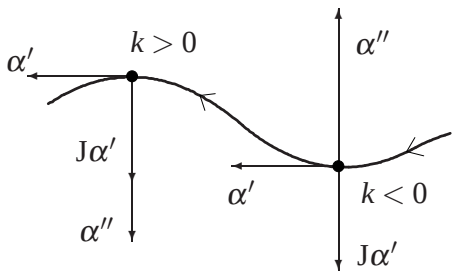
Su curvatura se define por

$$k(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{N}(s) \rangle \, .$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \mathbf{T}'(s) & = & k(s)\,\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) & = & -k(s)\,\mathbf{T}(s). \end{array} \right.$$

Observación. Si $\alpha(s)$ es una curva plana, su curvatura $k(s)$ sí tiene signo.





---

2. El plato principal: Superficies en el espacio

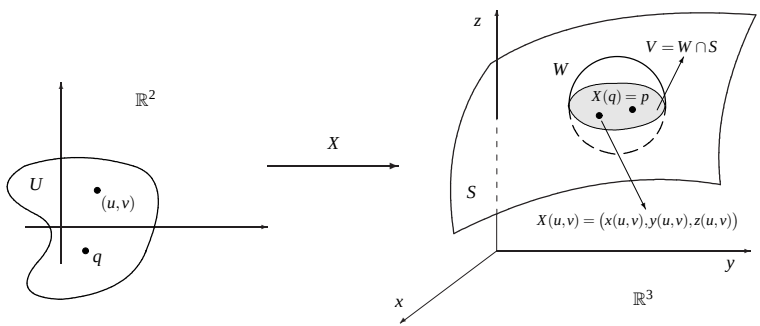
Definición de superficie regular. Un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ es una ***superficie regular*** si para todo punto p de S existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en S (con la topología relativa de $S \subset \mathbb{R}^3$) y una aplicación $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tales que

S1) $X(U) = V$ y $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable en el sentido ordinario,

S2) $X : U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo (es decir, la inversa $X^{-1} : V \longrightarrow U$ también es continua) y

S3) para todo $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación X se llama ***parametrización, carta*** o ***sistema de coordenadas***. El entorno V se llama ***entorno coordenado***.



¿Qué significan las condiciones anteriores?

i) La aplicación $X : U \longrightarrow V$ es diferenciable. Esto significa que si escribimos $X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, las funciones $x, y, z : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son derivables con derivadas continuas de todos los órdenes.

ii) La condición **S1)** nos permite asegurar que la superficie S es suave en el sentido de que no tiene aristas ni vértices.

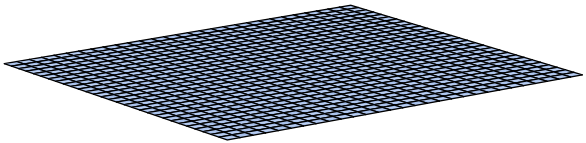
iii) Con la condición **S2)** se evita que la superficie S tenga autointersecciones. Esto es muy importante con vistas a conseguir unicidad a la hora de definir el plano tangente a la superficie en un punto.

iv) La condición **S3)** es esencial para asegurar la existencia del plano tangente en todos los puntos de S. Es una hipótesis similar a que $\alpha'(t) \neq 0$ en el caso de una curva regular.

Superficie de modo informal. Una superficie se obtiene tomando trozos de plano, deformándolos, doblándolos y encajándolos de forma que la figura resultante no tenga vértices, lados o autointersecciones.

Ejemplos de superficies regulares.

El plano. $\Pi = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\big\}$.



donde a, b, c no se anulan simultáneamente.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $c \neq 0$; entonces, podemos despejar la coordenada z como $z = (d - ax - by)/c$. Tomamos ahora $U = \mathbb{R}^2$, $V = \Pi$ (el entorno coordenado va a ser, en este caso, toda la superficie), y sea $X : U \longrightarrow V$ la aplicación dada por

$$X(u,v) = \left(u, v, \frac{d - au - bv}{c}\right).$$

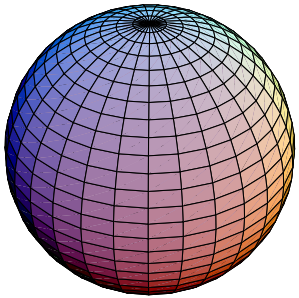
Entonces se tiene claramente que:

i) X es diferenciable pues es lineal.

ii) $X^{-1} : \Pi \longrightarrow U$ es la proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$, que es claramente continua, y por tanto, X es un homeomorfismo.

iii) Los vectores $X_u = (1, 0, -a/c)$ y $X_v = (0, 1, -b/c)$ son linealmente independientes, y en consecuencia, dX_q es inyectiva para todo q.

La esfera. $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$.



Definimos $X_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$X_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right),$$

donde $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\}$.

Es claro que X_1 es diferenciable en U, por lo que se tiene **S1)**. Además, X_1^{-1} es la proyección ortogonal sobre el plano $z=0$, que también es continua; luego X_1 es un homeomorfismo sobre la imagen $X_1(U)$ y se verifica **S2)**. Por último, se tiene que

$$(X_1)_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right), \quad (X_1)_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

son linealmente independientes, por lo que $d(X_1)_q$ es inyectiva y se cumple **S3)**. En consecuencia X_1 es una parametrización. Para ver que $\mathbb{S}^2$ es una superficie regular, hay que comprobar que existen parametrizaciones para todos los puntos de $\mathbb{S}^2$. Con X_1 se cubren

todos los puntos que cumplen $z > 0$ pero... ¿cuántas necesitamos realmente? La respuesta se obtiene fácilmente.

Como vemos, no resulta sencillo encontrar todas las parametrizaciones de una superficie cualquiera, incluso cuando ésta es tan conocida como la esfera. De hecho, una misma superficie puede ser parametrizada de muy distintas formas, y unas parametrizaciones serán más adecuadas que otras según el fin que estemos persiguiendo.

2.1. Criterios prácticos para la determinación de superficies

Criterio 1: Grafos. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Entonces el conjunto formado por

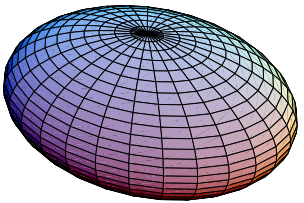
$$G(f) = \Big\{ \big(u, v, f(u, v)\big) : (u, v) \in U \Big\}$$

es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$. En otras palabras, cualquier grafo de una función diferenciable es una superficie regular.

Criterio 2: Valores regulares. Sean $f : V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y a un valor regular de f (es decir, df_p es sobreyectiva para todo $p \in f^{-1}(a)$). Entonces $S = f^{-1}(a)$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, denominada ***superficie de nivel***.

El elipsoide. Es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

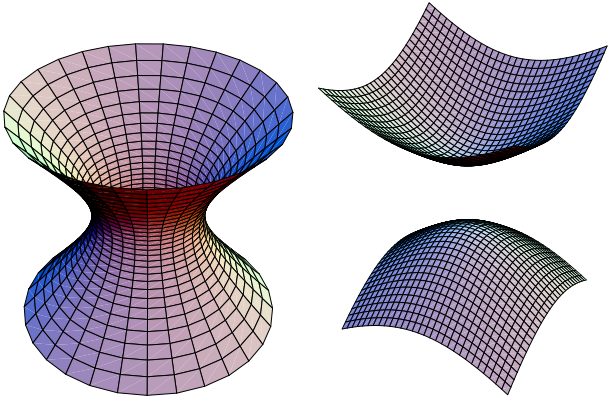


Para probar que se trata de una superficie regular, definimos $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

y buscamos sus puntos críticos. Es inmediato comprobar que el elipsoide $E = f^{-1}(1)$ es una superficie regular.

Los hiperboloides de una y dos hojas.



Se ve fácilmente que los conjuntos

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\} \qquad \text{(hiperboloide de una hoja)}$$
$$H' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\right\} \qquad \text{(hiperboloide de dos hojas)}$$

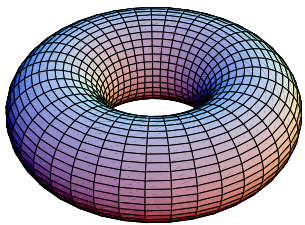
son superficies regulares sin más que utilizar el criterio anterior para la función

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

El único valor regular de f es el 0, por lo que $H = f^{-1}(1)$ y $H' = f^{-1}(-1)$ son superficies regulares.

El criterio de los valores regulares no sólo sirve para demostrar que las cuádricas son superficies regulares. He aquí un ejemplo de otra superficie de revolución que también admite la aplicación de dicho criterio.

El toro de revolución. Consideremos la circunferencia $\mathbb{S}^1(r)$ contenida en el plano $x = 0$ y centrada en el punto $(0, a, 0)$ con $a > r > 0$. Un punto genérico de esta circunferencia viene dado por $(0, y, z)$ y se tiene que $r^2 = z^2 + d^2$. Si rotamos la circunferencia $\mathbb{S}^1(r)$ alrededor del eje z, vamos a obtener una superficie de revolución descrita por la circunferencia en cuestión.



Se ve que

$$\mathbb{T}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\right\}$$

y que $\mathbb{T}^2 = f^{-1}(r^2)$, siendo $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2,$$

y $V = \mathbb{R}^3 \backslash \big\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\big\}$.

2.2. El plano tangente

Vector tangente a una superficie. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Diremos que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ es un ***vector tangente*** a S en p si existe una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

El plano tangente a S en un punto. Es el conjunto T_pS de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto p, es decir,

$$T_pS = \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \mathbf{v}\big\},$$

es decir,

$$T_pS = dX_q(\mathbb{R}^2).$$

De esta forma, es claro que T_pS es un plano vectorial en $\mathbb{R}^3$ que llamaremos *plano tangente* a S en p.

Base de T_pS. A continuación, nos planteamos encontrar una base del plano tangente T_pS. Para ello, como $\big\{(1,0),(0,1)\big\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces la inyectividad de dX_q implica que $\big\{dX_q(1,0), dX_q(0,1)\big\} = \big\{X_u(q), X_v(q)\big\}$ es una base de T_pS.

Podemos considerar el complemento ortogonal a T_pS dentro de $\mathbb{R}^3$, $(T_pS)^\perp$, como espacio vectorial euclídeo, y así obtenemos una recta vectorial que llamaremos *recta normal* a S en p. Por tanto, podemos escribir $\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus (T_pS)^\perp$.

El vector normal a S en un punto. Para cada $p \in S$, podemos encontrar un vector unitario $N(p)$ que genera la recta normal a S en p, lo que escribiremos como $(T_pS)^\perp = \big\{N(p)\big\}$. El vector $N(p)$ está unívocamente determinado (salvo el signo) y se denomina *vector normal (unitario)* a S en p.

Como $\big\{X_u(q), X_v(q)\big\}$ es una base de $T_{X(q)}S$, entonces se tiene que

$$N\big(X(q)\big) = \pm\frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\big|X_u(q) \times X_v(q)\big|},$$

lo que va a permitir calcular este vector de forma explícita.

2.3. Geometría intrínseca: La primera forma fundamental

La primera forma fundamental. La aplicación

$$\mathtt{I}_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathtt{I}_p(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p$$

se denomina la ***primera forma fundamental*** de S.

En lo que sigue, y salvo que queramos precisar con exactitud el punto sobre el que estamos trabajando, escribiremos simplemente $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en lugar de $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$.

Expresión local de $\mathtt{I}_p$. Sean $\mathbf{v} \in T_pS$ y $\alpha : I \to S$ con condiciones iniciales p y $\mathbf{v}$. Tomamos una parametrización (U, X) de S y consideramos $\widetilde{\alpha}(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ la expresión en coordenadas de α. Entonces $\mathbf{v} = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q) = aX_u(q) + bX_v(q)$, donde a, b son números reales y $X(q) = p$. Si ahora calculamos $\mathtt{I}_p(\mathbf{v})$ obtenemos

$$\mathtt{I}_p(\mathbf{v}) = |aX_u + bX_v|^2 = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle .$$

Los coeficientes de la 1ª f. f. Denotamos por $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ y $G = \langle X_v, X_v \rangle$. Estas tres funciones (toman sus valores en U) son claramente diferenciables y se denominan los *coeficientes de la primera forma fundamental.*

Ejemplos.

El plano. $\Pi = \big\{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)\big\}$, que pasa por el punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ sepuede parametrizar mediante

$$X(u, v) = (p_1 + uv_1 + vw_1, p_2 + uv_2 + vw_2, p_3 + uv_3 + vw_3);$$

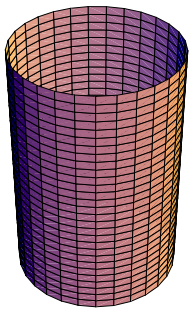
de esta forma, $X_u = (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v}$ mientras que $X_v = (w_1, w_2, w_3) = \mathbf{w}$.

Por tanto, $E = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, $F = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ y $G = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$. Obsérvese que, si la base es ortonormal, entonces $E = G = 1$ y $F = 0$.

El cilindro. $C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \right\}$ parametrizado por

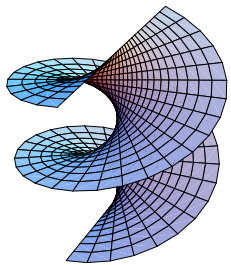
$$X(u, v) = (r \cos u, r \operatorname{sen} u, v).$$

Entonces $X_u = (-r \operatorname{sen} u, r \cos u, 0)$ y $X_v = (0, 0, 1)$. Luego $E = r^2$, $F = 0$ y $G = 1$ son los coeficientes de su primera forma fundamental respecto a X.



El helicoide. Consideremos la hélice parametrizada mediante $\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, au)$, con $a > 0$. Observemos que esta curva se va *enroscando* alrededor del eje z, por lo que tiene sentido, para cada punto $\alpha(u)$, tomar la recta determinada por éste y el punto del eje z con coordenadas $(0, 0, au)$. La unión de dichas rectas es una superficie regular que se denomina el *helicoide*. Una parametrización para esta superficie es

$$X(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, au), \qquad \text{con} \;\; u, v \in \mathbb{R}.$$



Así, $X_u = (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, a)$ y $X_v = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$, luego $E = a^2 + v^2$, $F = 0$ y $G = 1$ son los coeficientes de su primera forma fundamental respecto a X.

Propiedades elementales que verifican los coeficientes de la 1ª f. f.

i) $E, G > 0$,

ii) $EG - F^2 > 0$.

2.4. Aplicaciones de la primera forma fundamental

2.4.1. Midiendo longitudes

Sea $\alpha : I \longrightarrow S$ una curva parametrizada. Su longitud de arco viene dada por

$$s(t) = \int_0^t \big|\alpha'(r)\big|\, dr = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(r), \alpha'(r)\rangle}\, dr = \int_0^t \sqrt{\mathtt{I}_{\alpha(r)}\big(\alpha'(r)\big)}\, dr.$$

En particular, si $\alpha(t) = X\big(u(t), v(t)\big) = X\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)$, siendo (U, X) una parametrización de S, la longitud de arco se puede expresar como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E\big(\widetilde{\alpha}(r)\big)u'(r)^2 + 2F\big(\widetilde{\alpha}(r)\big)u'(r)v'(r) + G\big(\widetilde{\alpha}(r)\big)v'(r)^2}\, dr.$$

Por lo tanto,

$$s'(t) = \sqrt{E\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)u'(t)^2 + 2F\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)u'(t)v'(t) + G\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)v'(t)^2},$$

es decir,

$$\left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 = E\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)\left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 + 2F\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)\frac{du}{dt}(t)\frac{dv}{dt}(t) + G\big(\widetilde{\alpha}(t)\big)\left(\frac{dv}{dt}(t)\right)^2;$$

esto suele escribirse como $(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$, y se dice que ds es el *elemento de arco* o *elemento de línea* de S.

2.4.2. Midiendo ángulos

Sean $\alpha : I \longrightarrow S$ y $\beta : I \longrightarrow S$ dos curvas parametrizadas regulares que se cortan en un punto $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, $t_0 \in I$. El ángulo θ que forman (es decir, el ángulo que determinan sus vectores tangente en dicho punto) viene dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0)\rangle}{\big|\alpha'(t_0)\big|\big|\beta'(t_0)\big|}.$$

En particular, dada una parametrización (U, X), si tomamos sus *curvas coordenadas* para v_0 y u_0 fijos, esto es, $\alpha(u) = X(u, v_0)$, $\beta(v) = X(u_0, v)$, entonces el ángulo que forman en $X(u_0, v_0)$ vale

$$\theta = \arccos \frac{\langle X_u, X_v\rangle}{|X_u||X_v|}(u_0, v_0) = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}(u_0, v_0).$$

Observemos que $\theta \geq 0$ y que las curvas coordenadas de X son ortogonales si, y sólo si, $F \equiv 0$. En tal caso, se dice que X es una *parametrización ortogonal*.

2.4.3. Midiendo áreas

Si $R \subset S$ es una región de una superficie regular S, tal que existe una parametrización (U, X) con $R \subset X(U)$, se define el *área* de R como

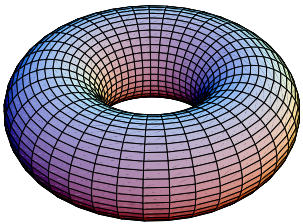
$$A(R) = \int_{X^{-1}(R)} |X_u \times X_v| \, dudv.$$

El siguiente resultado de carácter técnico prueba que ésta es una buena definición.

Lema. El número $A(R)$ no depende de la parametrización escogida. Además

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Área del toro de revolución. Recordemos que el toro de revolución $\mathbb{T}^2$ es una superficie regular



que se puede parametrizar de la forma

$$X(u,v) = \big((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u\big),$$

donde $(u,v) \in U = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$. Los coeficientes de la primera forma fundamental respecto a esta parametrización vienen dados por $E = r^2$, $F = 0$, $G = (a + r\cos u)^2$. Así,

$\sqrt{EG-F^2} = r(a + r\cos u)$ y, para toda región R contenida en el entorno coordenado $X(U)$, se tendrá que

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG-F^2}\, dudv = \iint_{X^{-1}(R)} r(a + r\cos u)\, dudv = 4ar\pi^2.$$

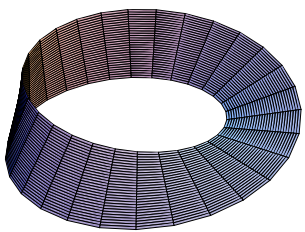
2.5. Orientabilidad de superficies

La banda (o cinta) de Möbius. La banda de Möbius fue co-descubierta de manera independiente por los matemáticos alemanes August Ferdinand Möbius y Johann Benedict Listing en 1858. Es una superficie regular que puede obtenerse de la siguiente forma: tomamos un rectángulo de papel de base, por ejemplo, 4π y altura 2; entonces, podemos identificar los lados más pequeños del rectángulo, pero invirtiendo sus extremos. Una parametrización para esta superficie viene dada por

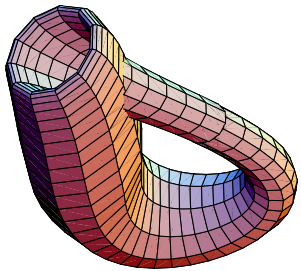
$$X(u,v) = \Big(\big(2 - v\,\mathrm{sen}(u/2)\big)\,\mathrm{sen}\,u, \big(2 - v\,\mathrm{sen}(u/2)\big)\cos u, v\cos(u/2)\Big),$$

donde $0 < u < 2\pi$ y $-1 < v < 1$. Para encontrar otra parametrización que cubra por completo la banda de Möbius basta hacer variar el parámetro u entre $-\pi$ y π.

En estos términos se puede demostrar, utilizando la teoría que vamos a presentar, que la banda de Möbius es una superficie no orientable.



La botella de Klein. La *botella de Klein* fue descrita por primera vez en 1882 por el matemático alemán Felix Klein, y bautizada originalmente como la «superficie de Klein»; una traducción errónea del alemán (*Fläche* = 'superficie' por *Flasche* = 'botella') hizo que sea conocida hoy en día como la «botella de Klein».

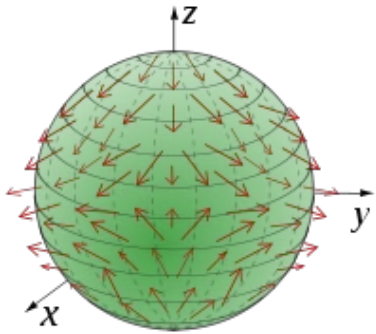


Teorema de Brouwer-Samelson. *Toda superficie regular y compacta en* $\mathbb{R}^3$ *es orientable.*

La compacidad de la botella de Klein y su no orientabilidad implican que no puede ser una superficie regular en el sentido de nuestra definición.

Para formalizar la noción de orientabilidad necesitamos algunas definiciones.

Campo de vectores. Sea S una superficie regular. Un ***campo de vectores*** ξ sobre S es una función vectorial $\xi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\xi(p)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ para cada $p \in S$. Diremos que ξ es ***diferenciable*** si lo es como función de S a $\mathbb{R}^3$.



Campo tangente. Dado un campo de vectores ξ sobre S, se dice que ξ es un ***campo de vectores tangente*** si $\xi(p)$ es tangente a S en p, para todo $p \in S$. Diremos que ξ es ***normal*** a S si $\xi(p)$ es normal a S en p, para todo $p \in S$. Por último, diremos que ξ es ***unitario*** si $\left|\xi(p)\right| = 1$, para todo $p \in S$.

Es usual representar por $\mathfrak{X}(S)$ los campos de vectores diferenciables sobre S que son tangentes. Además, denotaremos por $\mathfrak{X}(S)^{\perp}$ los campos de vectores diferenciables y normales sobre S.

Superficie orientable. Una superficie regular S se dice que es ***orientable*** si existe un campo (global) de vectores N sobre S que sea diferenciable, normal y unitario.

Si S es orientable, cada campo de vectores N en las condiciones de la definición se llama una ***orientación*** de S. Una superficie orientable se dice que está ***orientada*** cuando se ha elegido una orientación concreta.

Observaciones. Esta definición requiere algunos comentarios. Si para cada punto $p \in S$ tenemos un vector normal $N(p)$, esto es equivalente a afirmar que el plano tangente T_pS está orientado y tiene un sentido de giro bien definido por el producto vectorial de $\mathbb{R}^3$. Luego el hecho de tener un campo normal N globalmente definido en la superficie, permite determinar un sentido de giro en todos los puntos de la misma.

Si S es orientable, se pueden distinguir dos lados de la superficie: el lado hacia el que apunta N y el lado opuesto. Por ello, las superficies orientables también se denominan *superficies de dos caras*.

Por el contrario, si una superficie no es orientable, tiene una sola cara, tal y como ocurre con la banda de Möbius: un ser que anduviese sobre esta superficie, llegaría a su posición original pero en el «lado inferior».

Si queremos definir un campo normal globalmente definido para la banda de Möbius, veremos que es imposible. Podemos hacerlo de cualquier forma en cada uno de los entornos coordenados, pero ocurre que, en la intersección de éstos (que tiene dos componentes conexas), los normales no coinciden en todos los puntos, cualquiera que sea la elección que de ellos hagamos.

2.6. Curvaturas de una superficie

Sección normal. Se define la *sección normal* $C_{\mathbf{v}}$ como la curva plana que resulta al cortar la superficie S con el plano $\Pi_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v}, N(p)\}$.

Así, $C_{\mathbf{v}} = \Pi_{\mathbf{v}} \cap S$, y podemos encontrar una parametrización (por la longitud de arco) de $C_{\mathbf{v}}$ dada por $\alpha : I \longrightarrow C_{\mathbf{v}} \subset S$ de suerte que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Como $\mathbf{v} \in T_pS$, entonces $\mathbf{v} \perp N(p)$ y la curva α tiene como vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{J}_{\Pi_{\mathbf{v}}}\mathbf{v} = N(p)$, donde $\mathbf{J}_{\Pi_{\mathbf{v}}}$ representa la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el plano $\Pi_{\mathbf{v}}$. Entonces

$$\langle \alpha''(0), N(p) \rangle = \langle k(0)\mathbf{n}(0), N(p) \rangle = k(0),$$

siendo k la curvatura de α como curva plana dentro del plano vectorial $\Pi_{\mathbf{v}}$ orientado por la base ortonormal positivamente orientada $\big\{\mathbf{v}, N(p)\big\}$.

Ejemplos. Secciones normales del plano. Son rectas.

Secciones normales de la esfera. Consideremos la esfera de radio r, $\mathbb{S}^2(r)$, que suponemos orientada por el normal exterior $N(p) = (1/r)p$. Si $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^2(r)$, entonces las secciones normales son las circunferencias máximas de la esfera, esto es, circunferencias de radio r cuya curvatura, como curva plana, es $-1/r$.

Obsérvese que el signo negativo se debe a la orientación escogida: la aceleración de las secciones normales siempre apunta hacia el interior, mientras que hemos elegido como orientación de la superficie la dada por el normal exterior.

Secciones normales del cilindro. Sea C el cilindro dado por la ecuación $x^2+z^2=r^2$ (el cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje y) y vamos a considerar el punto $p=(r,0,0)$. El plano tangente T_pC está generado por los vectores $\mathbf{v}_1=(0,1,0)$ y $\mathbf{v}_2=(0,0,1)$, mientras que el normal es $N(p)=(1,0,0)$, donde estamos escogiendo la orientación hacia fuera.

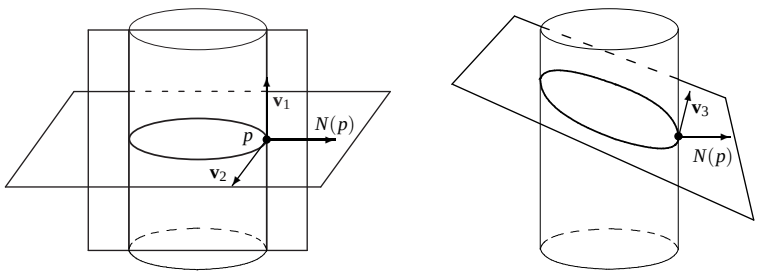
El plano $\Pi_{\mathbf{v}_1}$ es el plano $z=0$, así que

$$\Pi_{\mathbf{v}_1}\cap C=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=r^2,\ z=0\big\}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=\pm r,\ z=0\big\},$$

que son dos rectas paralelas. La única que pasa por p es $\{x=r, z=0\}$, cuya curvatura es 0.

El plano $\Pi_{\mathbf{v}_2}$ es $y=0$, así que

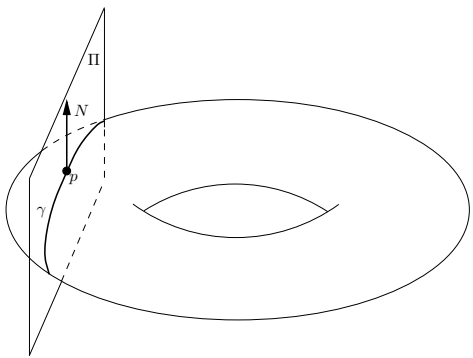
$$\Pi_{\mathbf{v}_2}\cap C=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=r^2,\ y=0\big\},$$



que es una circunferencia de radio r en el plano $y = 0$, cuya curvatura es $-1/r$ (el signo negativo se debe a que el vector normal al cilindro apunta en dirección contraria a la aceleración de la circunferencia).

Finalmente, si tomamos $\mathbf{v}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, con $a, b \neq 0$, un sencillo cálculo demuestra que $\Pi_{\mathbf{v}_3} \cap C$ es una elipse. Su curvatura está comprendida entre $-1/r$ y 0.

Las curvaturas de una superficie vienen descritas por dos números. Veamos cómo. Sean S una superficie regular orientada por N y Π un plano que pase por p y que contenga a N. La intersección $\Pi \cap S$ es una curva plana $\gamma \subset \Pi$ que pasa por p. Se calcula la curvatura $k(p)$ de γ con respecto a N y se repite este proceso para todos los planos que contengan a N.



Las curvaturas principales. Las curvatura principales $k_1(p)$ y $k_2(p)$de S en p se definen como el *mínimo* y el *máximo* de las curvaturas de las curvas planas obtenidas como antes.

La curvatura de Gauss. Se denomina ***curvatura de Gauss*** de S en $p \in S$ a

$$K(p) = k_1(p)k_2(p).$$

La curvatura de media. Se llama ***curvatura media*** de S en $p \in S$ a

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Nota importante. Las curvaturas principales no son intrínsecas.

Proposición. La curvatura de Gauss no depende de la orientación escogida para la superficie. La curvatura media cambia de signo al cambiar la orientación.

Clasificación de los puntos de una superficie. Dependiendo del signo de la curvatura de Gauss, los puntos de una superficie se clasifican de la siguiente forma.

Sea S una superficie regular orientada y sea $p \in S$. Entonces,

i) se dice que $p \in S$ es ***elíptico*** si $K(p) > 0$;

ii) se dice que $p \in S$ es ***hiperbólico*** si $K(p) < 0$;

iii) se dice que $p \in S$ es ***parabólico*** si $K(p) = 0$ pero alguna de las dos curvaturas principales en p no se anula;

iv) se dice que $p \in S$ es ***plano*** cuando $k_1(p) = k_2(p) = 0$.

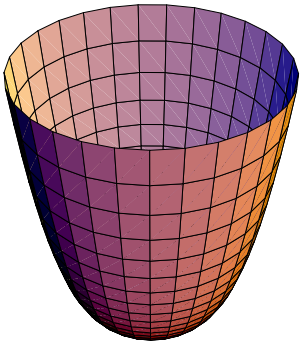
Ejemplos. Veamos ejemplos de cómo son los puntos de algunas superficies:

i) Todos los puntos de una esfera son elípticos, pues $K \equiv 1/r^2 > 0$.

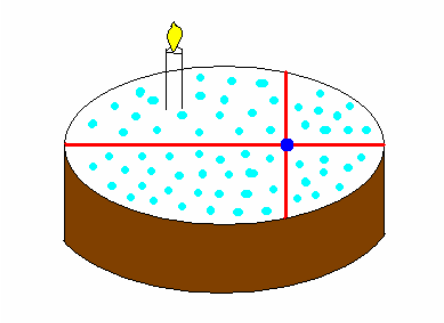
ii) En la silla de montar parametrizada por $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ el punto $p = (0, 0, 0)$ es hiperbólico, ya que $k_1(p) = -2$ y $k_2(p) = 2$, y por tanto, $K(p) = -4 < 0$.

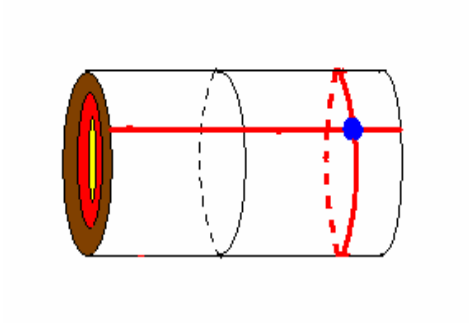
iii) Todos los puntos del cilindro son parabólicos, pues $k_1 \equiv -1/r$ y $k_2 \equiv 0$, así que $K \equiv 0$ para todo p.

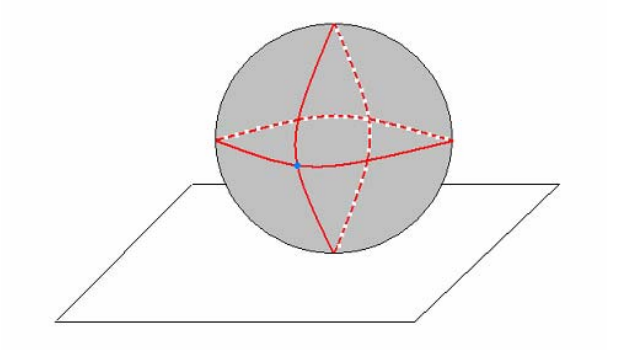
iv) Todos los puntos del plano son planos, aunque no son los únicos ejemplos de puntos planos: si tomamos la superficie de revolución generada por $z = y^4$ (revolución alrededor del eje z), entonces el origen de coordenadas es un punto plano en una superficie que no es un plano.

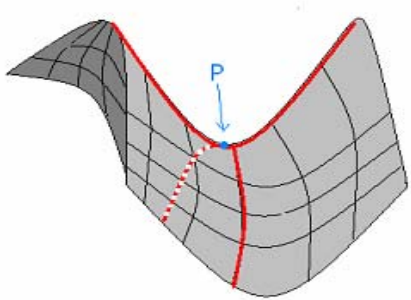


Vean cómo hemos explicado los diferentes puntos de una superficie en la Semana de la Ciencia y la Tecnología de Murcia en noviembre 2008.



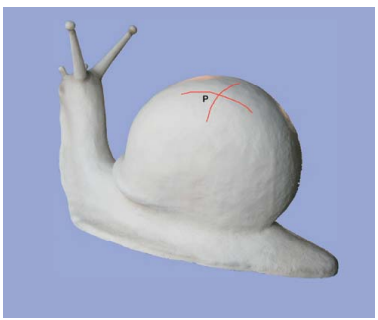






P

Q


P

Q

2.7. Isometrías locales

Isometría local. Una ***isometría local*** entre dos superficies regulares S_1 y S_2 es una aplicación diferenciable $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ que conserva la primera forma fundamental, es decir, que conserva el producto escalar: para cada $p \in S_1$ y cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS_1$,

$$\langle d\varphi_p(\mathbf{v}), d\varphi_p(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle .$$

Isometría global. Una ***isometría (global)*** entre dos superficies regulares S_1 y S_2 es una isometría local que es, a su vez, un difeomorfismo global. En esta situación se dice que S_1 y S_2 son ***(globalmente) isométricas***. Además, S_1 y S_2 son ***localmente isométricas*** si, para todo $p \in S_1$, existen un entorno $V \subset S_1$ de p y una isometría global $\varphi : V \longrightarrow \varphi(V) \subset S_2$, y análogamente para S_2.

Por lo tanto, si dos superficies regulares son (globalmente) *isométricas*, entonces son «iguales» desde los puntos de vista topológico, diferenciable y métrico. Desde luego, existen superficies localmente isométricas que no lo son globalmente. Veamos el ejemplo que proponíamos al comienzo de la sección.

Ejemplo. El plano y el cilindro son localmente isométricos, pero no son globalmente isométricas.

Teorema. Sea $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ una isometría local entre superficies regulares. Entonces, para todo $p \in S_1$, existen parametrizaciones $X : U \longrightarrow S_1$, $\overline{X} : U \longrightarrow S_2$ cubriendo $p \in S_1$ y $\varphi(p) \in S_2$, respectivamente, tales que $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$ y $G = \overline{G}$.

Una suerte de recíproco para este resultado es el siguiente.

Teorema. Sean S_1, S_2 superficies regulares y $X : U \longrightarrow S_1$, $\overline{X} : U \longrightarrow S_2$ parametrizaciones de S_1 y S_2, respectivamente, tales que $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$ y $G = \overline{G}$. Entonces, la aplicación $\varphi = \overline{X} \circ X^{-1} : X(U) \subset S_1 \longrightarrow \overline{X}(U) \subset S_2$ es una isometría (global) entre los abiertos $X(U)$ y $\overline{X}(U)$ de las superficies S_1 y S_2.

2.8. Los símbolos de Christoffel

Sea S una superficie regular orientada por N y sea $X : U \longrightarrow V$ una *parametrización de S positivamente orientada*, es decir, tal que $\{X_u, X_v, N\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ positivamente orientada. Se pueden expresar las derivadas de estos vectores en función de la propia base $\{X_u, X_v, N\}$ mediante unas funciones Γ_{ij}^k, llamados *símbolos de Christoffel*.

Estudiemos a continuación los vectores X_{uu}, X_{uv}, X_{vu}, X_{vv}. Como son vectores de $\mathbb{R}^3$, los podemos expresar como combinación lineal de la base $\{X_u, X_v, N\}$. Entonces,

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + L_3 N, \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_4 N, \end{cases}$$

para ciertos coeficientes Γ_{ij}^k y L_m, con $i, j, k \in \{1, 2\}$ y $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Un detalle crucial. Es fácil ver que sólo dependen de la primera forma fundamental de la superficie, a saber,

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{E_u}{2} & \dfrac{E_v}{2} & F_v - \dfrac{G_u}{2} \\ F_u - \dfrac{E_v}{2} & \dfrac{G_u}{2} & \dfrac{G_v}{2} \end{pmatrix}.$$

2.9. Teorema Egregium de Gauss.

Un rápido cálculo permite deducir la llamada *ecuación de Gauss* de una superficie:

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 = EK.$$

Esta ecuación supuso uno de los grandes avances de la Geometría Diferencial de superficies, pues con ella se está diciendo, implícitamente, que la curvatura de Gauss sólo depende de los símbolos de Christoffel y, por lo tanto, *exclusivamente de la primera forma fundamental*. En otras palabras, K es un concepto *intrínseco*, lo cual resulta bastante sorprendente, tal y como ya hemos comentado, si tenemos en cuenta que la curvatura de Gauss se define a partir de la aplicación de Gauss, esto es, del normal a la superficie.

La ecuación de Gauss permite además demostrar uno de los grandes teoremas de la Geometría Diferencial, el llamado *teorema Egregium de Gauss*. Este resultado fue probado por Gauss en 1828, y apareció publicado por primera vez en su gran obra «Disquisitiones generales circa superficies curva».

El teorema. La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales. Es decir, si $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local, entonces $K_1(p) = K_2\big(\varphi(p)\big)$, para todo $p \in S_1$, donde K_1 y K_2 representan, respectivamente, las curvaturas de Gauss de S_1 y S_2.

El recíproco del teorema Egregium de Gauss no es cierto en general.

2.10. Geodésicas

Dada una curva α en una superficie S, podemos descomponer el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^3 = T_{\alpha(t)}S \oplus \big\{N\big(\alpha(t)\big)\big\}$. Entonces, $\alpha''(t) \in \mathbb{R}^3$ se escribe de forma única como

$$\alpha''(t) = \alpha''(t)^{\top} + \alpha''(t)^{\perp}.$$

En estos términos, el vector $\alpha''(t)^{\top}$ se denomina *aceleración tangencial* o *intrínseca* de la curva α, y representa la aceleración que experimenta una partícula bidimensional cuya trayectoria está descrita por α. Por otra parte, el vector $\alpha''(t)^{\perp}$ se denomina *aceleración normal* o *extrínseca*. En particular se tendrá $\alpha''(t)^{\perp} = \lambda(t)N\big(\alpha(t)\big)$, para una cierta función diferenciable $\lambda(t)$. Ahora bien, ¿cuál es el valor de λ? Obviamente, éste vendrá dado por el producto escalar $\lambda(t) = \big\langle \alpha''(t), N\big(\alpha(t)\big)\big\rangle$, lo que permite escribir $\alpha''(t)^{\perp} = \big\langle \alpha''(t), N\big(\alpha(t)\big)\big\rangle\, N\big(\alpha(t)\big)$. Por otro lado, es usual la notación

$$\alpha''(t)^{\top} = \frac{D\alpha'}{dt}(t),$$

por lo que podemos escribir

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) + \big\langle \alpha''(t), N\big(\alpha(t)\big)\big\rangle\, N\big(\alpha(t)\big).$$

Cuando trabajamos en un plano (o en general, en cualquier superficie que contenga una recta) las rectas son un tipo de curvas que presentan una serie de características muy particulares. Por ejemplo,

i) minimizan la distancia entre dos puntos,

ii) tienen curvatura constantemente nula y

Cabe preguntarse entonces si, cuando trabajamos en una superficie arbitraria S, siempre podemos encontrar curvas con características similares. La respuesta, como veremos en breve, es afirmativa, y tales curvas se denominan las *geodésicas* de S.

Sea $\gamma : / \to S$ una curva parametrizada. Se dice que γ es una ***geodésica*** de S si su aceleración γ'' es normal a S.

Propiedades de las geodésicas. Sea γS una geodésica de una superficie regular S.

i) $|\gamma'(t)|$ es constante.

ii) Las geodésicas se conservan por isometrías locales, ya que sólo dependen de la derivada covariante y, por tanto, de los símbolos de Christoffel. El concepto de geodésica es un concepto intrínseco.

iii) Supongamos que la curva γ está p.p.a. y que $\gamma''(s) \neq \mathbf{0}$ para todo s. Sabemos que γ es geodésica si, y sólo si, $(D\gamma'/ds)(s) = \big(\gamma''(s)\big)^{\top} = \mathbf{0}$, es decir, si, y sólo si, $\gamma''(s) = k_\gamma(s)\mathbf{n}_\gamma(s)$ está en la dirección del vector normal a la superficie (en el punto $\gamma(s)$). Luego γ es una geodésica si, y sólo si, $\mathbf{n}_\gamma(s) = \pm N(s)$.

iv Para cada par $(p, \mathbf{v})$, con $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$, existe una única geodésica $\gamma \subset S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Ejemplos de geodésicas.

En el plano. Dado un vector $\mathbf{a}$ unitario, consideremos el plano $\Pi = \big\{p \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{a}, p\rangle = c\big\}$, y tomemos como vector normal $N(p) = \mathbf{a}$, para todo $p \in \Pi$. Una curva γ en el plano es geodésica si, y sólo si, $\gamma''(t) = \mathbf{0}$, esto es, $\gamma(t) = p + t\mathbf{v}$. Las únicas geodésicas del plano son, como cabía esperar, las rectas.

En la esfera. Sean $p \in \mathbb{S}^2(r)$ y $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^2(r)$. Supongamos que el normal a la esfera es $N(p) = (1/r)p$. Si tomamos el plano determinado por $\mathbf{v}$ y por $N(p)$, su intersección con la esfera es una circunferencia máxima, que es, además, una sección normal. Por lo tanto, el vector normal de esta curva es $\mathbf{n} = \pm N(p)$, lo que demuestra que es una geodésica. Todas las circunferencias máximas son geodésicas en la esfera, y son las únicas.

En el cilindro. Existen tres tipos de geodésicas: las hélices, las circunferencias (paralelos del cilindro) y las rectas (sus meridianos).

3. El postre: Variedades diferenciables

Preparando el terreno:

- El espacio normal a una curva en $\mathbb{R}^2$ está generado por un solo vector;
- El espacio normal a una curva en $\mathbb{R}^3$ está generado por dos vectores;
- El espacio normal a una superficie en $\mathbb{R}^3$ está generado por un solo vector;
- El espacio normal a una superficie en $\mathbb{R}^4$ estaría generado por ... vectores;
- El espacio normal a una curva en $\mathbb{R}^n$ está generado por $(n-1)$ vectores;
- El espacio normal a una superficie en $\mathbb{R}^n$ estaría generado por $(n-2)$ vectores;
- Una curva es "algo" uni-dimensional; una superficie es "algo" bi-dimensional; pero $\mathbb{R}^3$ es tri-dimensional.
- Vivimos en un mundo tetra-dimensional, ¿no es cierto?
- Y ese mundo ¿está situado dentro de algún otro espacio?

HAY QUE LIBERARSE DEL ESPACIO AMBIENTE

No nos queda más remedio que definir algo nuevo, de manera que las curvas y superficies sean casos particulares. Es el concepto de Variedad Diferenciable.

Carta n-dimensional. Sea M un conjunto. Una *carta n-dimensional* sobre M es una aplicación biyectiva $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ cuya imagen $V = \varphi(U)$ es un conjunto abierto del espacio euclídeo.

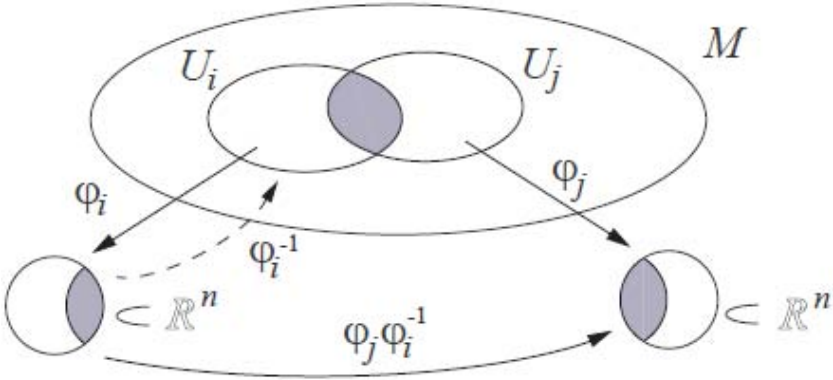
Al igual que ocurre con las superficies, hay conjuntos que no es posible cubrir mediante una sola carta, de modo que necesitaremos colecciones de cartas entre las que exista compatibilidad, en un sentido que pasamos a precisar.

Cartas compatibles. Dos cartas n-dimensionales (U, φ) y (V, ψ) sobre un conjunto M son *compatibles* si $U \cap V = \emptyset$ o bien $U \cap V \neq \emptyset$, los conjuntos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\psi \circ \varphi^{-1}$ son difeomorfismos.

Ahora estamos en condiciones de definir uno de los conceptos fundamentales de este tema.

Atlas n-dimensional. Un *atlas diferenciable n-dimensional* sobre un conjunto M es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:
(1) $\cup_{i \in A} U_i = M$.
(2) Para todo par de índices i y j, las cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son compatibles.
Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ determina una *estructura diferenciable* sobre M.

Siempre consideraremos atlas de clase $\mathcal{C}^\infty$, es decir, de manera que los cambios de cartas sean diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$.



Concepto de variedad diferenciable. Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un par $(M, \mathcal{A})$ formado por un conjunto M y un atlas n-dimensional $\mathcal{A}$ sobre M.

Para indicar la dimensión n, en algunas ocasiones escribiremos M^n en lugar de M, y cuando la estructura diferenciable sea conocida omitiremos cualquier referencia a ella.

Ejemplos.

- En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ podemos definir una estructura diferenciable considerando como carta global la aplicación identidad. Nos referiremos a ella como la estructura diferenciable estándar de $\mathbb{R}^n$.
- Consideremos la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) = s^3$. Entonces φ proporciona una estructura diferenciable sobre $\mathbb{R}$ distinta de la estructura estándar. Ello es debido a que la aplicacionn $\varphi^{-1}(s) = \sqrt[3]{s}$ no es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.
- Una curva, donde quiera que esté, es una v. d. 1-dimensional.
- Una superficie, donde quiera que esté, es una v. d. 2-dimensional.

Concepto de subvariedad. Sea M una variedad. Una *subvariedad* de M es un par (N, j) formado por una variedad N y una aplicación inyectiva $j : N \to M$ tal que, en cada punto $p \in N$, T_pN es un subespacio de $T_{j(p)}M$.

3.1. El espacio tangente

Curva en una variedad. Sea M una variedad diferenciable. Una *curva* en M es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en M. Sin pérdida de

generalidad podemos suponer que $0 \in I$. Dado un punto $p \in M$ y una curva α en M,se dice que α pasa por p si existe un valor $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t_0) = p$. Si una curva α pasa por un punto p siempre podemos reparametrizar la curva para que $\alpha(0) = p$.

Vector tangente en un punto. Un *vector tangente* a M en p es un vector tangente a una curva α en el punto p. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denomina el *espacio tangente* a M en p y se denota por T_pM.

Teorema. Sea $p \in M^n$. El espacio tangente T_pM es un espacio vectorial (real) de dimensión n.

3.2. Métrica en una variedad

Una métrica en una variedad M es una primera forma fundamental $\mathtt{I}_p \equiv \langle\, ,\, \rangle_p$ definida en cada espacio tangente T_pM la cual varía diferenciablemente, es decir,

$$\mathtt{I}_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathtt{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p \,.$$

3.3. Las curvaturas de una variedad $(M^n, \langle\, ,\, \rangle)$

Recordemos que en una superficie S habíamos definido dos curvaturas:

- la de Gauss K, intrínseca, independiente de dónde esté situada S;
- la media H, extrínseca, dependiente de dónde esté situada S.

Ahora, en una variedad $(M^n, \langle\, , \rangle)$, nos hemos liberado del espacio ambiente, luego sólo tiene sentido definir una curvatura intrínseca de M^n como generalización de la de Gauss K de una superficie.

Para ello, dado $p \in M^n$, lo haremos como sigue.

La curvatura seccional. Tomemos un plano $\Pi \subset T_pM$. Busquemos todas las geodésicas determinadas por p y los vectores del plano Π. Ellas generan un superficie $S_\Pi \subset M^n$, la cual hereda la métrica de $(M^n, \langle\, , \rangle)$.

Calculemos la curvatura de Gauss de S_Π en el punto p, que indicaremos por $K(\Pi)$ y llamaremos *curvatura seccional* de M^n en p con respecto al plano Π.

Y a partir de la curvatura seccional K de M^n, se construyen dos nuevas curvaturas:

La curvatura de Ricci. Sea $v \in T_pM$ un vector tangente unitario y construimos una base de T_pM de la forma $\{v, e_2, \ldots, e_n\}$. Se define la *curvatura de Ricci* en la dirección de v como

$$Ric(v) = \sum_{i=2}^{n} K(\Pi_i),$$

donde $\Pi_i = \{v, e_i\}$.

La curvatura escalar. Dados $p \in M^n$ y una base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de T_pM, se define la *curvatura escalar* como la aplicación

$$Scal : M^n \to \mathbb{R}, \qquad Scal = 2\sum_{i<j} K(\Pi_{ij}),$$

donde $\Pi_{ij} = \{e_i, e_j\}$.

Observaciones. Si M^2 es una v. d. 2-dimensional, es decir, una superficie, entonces

- Las curvaturas de Gauss y Ricci proporcionan la misma información de la superficie;
- $Scal(p) = 2K(p)$.

Referencias

Un curso de Geometría Diferencial, Mª Ángeles Hernández Cifre y José A. Pastor González, Ed. CSIC, Textos Universitarios nº 47, 2010.