Superficies regladas de tipo finito

Angel Ferrández and Pascual Lucas
Proc. XVth Portuguese-Spanish Conference on Math., Vol. III (1991), 167–172

(Partially supported by DGICYT grant PS87-0115)

Abstract

In this paper we construct non compact ruled surfaces on a certain class of compact spherical curves with the aim of knowing to what extend the finite type character of a Euclidean submanifold affects the finite type condition of a manifold shaped on it. Indeed, we show that our ruled surface is of finite type if and only if it is a circular cylinder of null 2-type.

Clasificación A.M.S. (1980): 53C40.

1. Introducción

Las subvariedades de tipo finito fueron introducidas recientemente por B.Y. Chen, [1, 2]. Desde entonces ha habido un creciente interés y desarrollo de esta materia, como lo prueban los numerosos artículos referentes a subvariedades compactas de tipo finito. En este caso, la estructura de tipo finito puede ser caracterizada por una práctica condición sobre el Laplaciano del vector curvatura media (ver Sección 2), que se convierte en condición necesaria cuando la subvariedad no es compacta.

Frecuentemente, las subvariedades construidas sobre una subvariedad dada no son compactas. Por ejemplo, dada una subvariedad compacta M de la esfera unidad S^{n+1} centrada en el origen de $\mathbb{R}^{n+2}$, construimos el cono perforado $CM\backslash\{0\}$ sobre M. En [4], J. Simons prueba que si M es minimal en S^{n+1} entonces $CM\backslash\{0\}$ es minimal en $\mathbb{R}^{n+2}$. En la terminología de tipo finito, ver [5], el resultado de Simons prueba que si M es de tipo uno entonces $CM\backslash\{0\}$ es tambien de tipo uno. En [3], O.J. Garay prueba que el cono perforado es de tipo finito si y sólo si M es minimal en S^{n+1}. En este contexto, el siguiente problema aparece de manera natural:

> <u>PROBLEMA:</u> "¿En qué medida el caracter de tipo finito de una subvariedad Euclídea afecta a la condición de tipo finito de la variedad construida sobre ella?"

En este artículo construimos los conos en $\mathbb{R}^3$ como superficies regladas construidas sobre una cierta clase de curvas compactas en la esfera S^2 con el objetivo de resolver el problema propuesto. En este punto, queremos señalar las importantes diferencias entre nuestro caso y el del cono. En efecto, nuestras superficies regladas nunca son minimales en $\mathbb{R}^3$ y son de tipo finito si y sólo si son cilindros circulares.

2. Preliminares

Una subvariedad p-dimensional M^p del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ se dice de tipo k si el vector de posición x de M^p en $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer como

$$x = c + x_{i_1} + \cdots + x_{i_k},$$

donde $\Delta x_{i_j} = \lambda_{i_j} x_{i_j}$, $\lambda_{i_1} < \cdots < \lambda_{i_k}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_{i_j} \in \mathbb{R}$ y Δ representa el Laplaciano de M^p con respecto a la métrica inducida. M^p se llama de tipo k-nulo si alguno de los $\lambda' s$ es cero. Si M^p es una subvariedad Euclídea de tipo k entonces existe un polinomio de grado k, $P(t)$, tal que $P(\Delta)\tilde{H} = 0$, donde $\tilde{H}$ es el vector curvatura media de M^p en $\mathbb{R}^n$. Cuando M^p es compacta esta condición es tambien suficiente para que M^p sea de tipo finito (ver [1]).
Denotemos por S^2 la esfera unidad centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$, sea M una curva compacta y totalmente umbilical de S^2 y supongamos que M está dada como la intersección de S^2 con un plano P. Como S^2 es simplemente conexa, podemos elegir un campo de vectores global v tal que $A_v X = \rho X$, para una constante $\rho \in \mathbb{R}$ y para todo campo X de M, donde A es la aplicación de Weingarten. Construimos una superficie reglada sobre M, M^*, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} M^p \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (m,t) & \longrightarrow & m + tv \end{array}$$

donde $\varepsilon > 0$ es el mayor número real para el cual M^* está isométricamente embebida en $\mathbb{R}^3$.
Nuestro primer objetivo es calcular los campos de vectores curvatura media $\bar{H}$ y $\tilde{H}$ de M^* y M, respectivamente, en $\mathbb{R}^3$. Para ello, sea σ y ξ la segunda forma fundamental y el vector de posición de M en $\mathbb{R}^3$. Sea m un punto cualquiera de M y sea T un campo local tangente a M tal que $\nabla_T T(m) = 0$, siendo ∇ la conexión de Levi-Civita de M. Por desplazamiento paralelo en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de los rayos de M^*, podemos extender T, v, ξ a campos de vectores sobre M^*, que seguiremos denotando con las mismas letras.
En primer lugar, y por un simple cálculo, tenemos

$$\tilde{H}(m) = (\rho v - \xi)(m).$$

Por otra parte, como

$$\bar{\nabla}_T T(m,t) = \frac{1}{r(t)}[\sigma(T,T)(m) - \xi(m)].$$

y $\bar{\nabla}_v v(m,t) = 0$ entonces

$$\bar{H}(m,t) = \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}_T T(m,t)\right)^N = -\frac{1}{2}\frac{1}{r(t)}\xi(m),$$

donde N significa la componente normal. Si escribimos $f(t) = \dfrac{1}{r(t)} > 0$ tenemos

$$\bar{H}(m,t) = -\frac{1}{2} f(t)\xi(m).$$

Usando argumentos de geometría elemental, encontramos que

$$f(t) = \frac{1}{1-\gamma t},$$

donde γ es la constante $\gamma = \tan\theta$, siendo θ el angulo entre v y e, donde e es el vector unitario normal al plano P que determina M. Por esta razón, M debe ser totalmente umbilical en S^2, para poder asegurar que v y e forman un ángulo constante.
Para conocer el comportamiento de los Laplacianos de orden superior del vector curvatura media, vamos a dar la formulación general del Laplaciano de ciertos campos de vectores definidos sobre M^*. Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(-\varepsilon,\varepsilon)$ y X un campo de vectores diferenciable definido sobre M, no necesariamente tangente. El transporte paralelo de X a lo largo de los rayos de M^* será tambien denotado por X. Entonces $(gX)(m,t) = g(t)X(m)$ es un campo de vectores diferenciable definido sobre M^*. Ahora consideremos una función diferenciable $F(m,t) \in \mathcal{C}^\infty(M^*)$ y para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ sea la función asociada

$$F_t : M \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \quad F_t(m) = F(m,t).$$

Sea $\alpha : J \longrightarrow M$ una curva que empieza en m en la dirección de T, es decir, $\alpha(0) = m,\ \alpha'(0) = T(m)$. Entonces la curva $\beta : J \longrightarrow M^*$ dada por $\beta(s) = \alpha(s/k) + tv(s/k)$, donde $k = 1 - \rho t$, tiene condicionales iniciales $\beta(0) = m + tv,\ \beta'(0) = T(m,t)$. Como

$$(TF)(m,t) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(F\circ\beta)(s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} F_t(\alpha(s/k)) = \frac{1}{k}(dF_t)_m(T(m)),$$

tenemos

$$(TF)(m,t) = \frac{1}{k}(TF_t)(m).$$

Usando (2) y (5) se deduce

$$k = r \quad \text{y} \quad \gamma = \rho = \tan\theta.$$

Por [1, p. 270], junto con (2) y (5) se obtiene el siguiente resultado.

Lemma 2.1 *Sean $\bar{\Delta}$ y Δ los Laplacianos de M^* y M, respectivamente, y sean g y X como antes. Entonces*

$$\bar{\Delta}(gX)(m,t) = gf^2(t)\Delta X(m) + \left(\rho f(t)\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) X(m).$$

3. El resultado principal

Con objeto de dar una fórmula para el Laplaciano de $\bar{H}$, un cálculo sencillo conduce a

$$\Delta\xi = -\bar{\nabla}_T T = -\tilde{H} = \xi - \rho v,$$

habiendo elegido, como hasta ahora, un campo T tangente en m tal que $\nabla_T T(m) = 0$. Entonces, por (3) y el Lema 2.1, tenemos

$$\bar{\Delta}\bar{H}(m,t) = \frac{1}{2}f^3(t)\{(\rho^2-1)\xi + \rho v\}.$$

Para obtener la expresión general de los Laplacianos de orden superior de $\bar{H}$, definimos las funciones

$$F_{i,j}(t) = \phi_{i,j}f^{2i+1}(t)$$

y

$$G_i(t) = a_i f^{2i+1}(t),$$

donde las constantes $\phi_{i,j}$ y a_i están dadas por

$$\phi_{i,i} = 1,\ i = 0, 1, \ldots$$

$$\phi_{i,j} = \phi_{i-1,j-1} - \rho^2(2i-1)^2\phi_{i-1,j}, \quad 1 \leqslant j < i, \quad i = 2, 3, \ldots$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_i = \sum_{j=1}^{i} \rho^{2j-1}\phi_{i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\phi_{i,0} = [1 - \rho^2(2i-1)^2]\phi_{i-1,0} + \rho a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Por otra parte, se tiene

$$\Delta v = \rho(\rho v - \xi).$$

Entonces, tomando $F_i = -F_{i,0}$, se tiene el siguiente resultado.

Proposition 3.1 *Con la notación anterior, para todo $k \in \mathbf{N}$ se tiene*

$$\bar{\Delta}^k \bar{H}(m,t) = \frac{1}{2}\{F_k\xi + G_k v\}.$$

Prueba. Es una simple inducción a partir del Lema 2.1 y el anterior conjunto de fórmulas (1)–(7). Ahora ya estamos preparados para dar una solución al problema planteado en la Introducción para nuestra clase de superficies regladas.

Theorem 3.2 *La superficie reglada M^* es de tipo finito si y solamente si es un cilindro circular de tipo 2-nulo construido sobre M, $M^* = M \times \mathbb{R}$.*

Prueba. Como hemos indicado en la Seccion 2, si M^* es de tipo k, entonces su vector curvatura media satisface

$$\bar{\Delta}^k\bar{H} + d_1\bar{\Delta}^{(k-1)}\bar{H} + \cdots + d_{k-1}\bar{\Delta}\bar{H} + d_k\bar{H} = 0,$$

donde $d_i,\ i = 1, \ldots, k$, son números reales (d_k no nulo porque es el producto de los autovalores no nulos usados para construir la inmersión de M^* en $\mathbb{R}^3$) y $\bar{\Delta}$ es el Laplaciano de M^*.
Supongamos que $\rho \neq 0$, es decir, M no es totalmente geodésica en S^2. Entonces usando la Proposición 3.1 y (8) tenemos

$$\begin{aligned} &\{F_k + d_1F_{k-1} + \cdots + d_{k-1}F_1 + d_kF_0\}\xi \\ &+\{G_k + d_1G_{k-1} + \cdots + d_{k-1}G_1 + d_kG_0\}v = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

De (4) y (6) se tiene que $r(t) = 1 - \rho t$. Entonces multiplicando (9) por r^{2k+1} y usando $F_{h,j}(t) = \phi_{h,j}f^{2h+1}(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &\{\phi_{k,0} + d_1\phi_{k-1,0}r^2 + \cdots + d_{k-1}\phi_{1,0}r^{2(k-1)} + d_k\phi_{0,0}r^{2k}\}\xi \\ &\qquad -\{a_k + d_1a_{k-1}r^2 + \cdots + d_{k-1}a_1r^{2(k-1)}\}v = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Usando que ξ y v son linealmente independientes, deducimos de (10) que $d_k\rho^{2k} = 0$, lo que supone una contradicción. Consecuentemente, $\rho = 0$, lo que significa que $f(t) = 1$ para todo t, es decir, M es totalmente geodésica. Entonces, M^* es isométrica a un cilindro circular $M \times \mathbb{R}$ construido sobre M. El recíproco es obvio.

Bibliography

[1] B.Y. CHEN, *Total mean curvature and submanifolds of finite type.* World Scientific, Singapore, 1984.

[2] B.Y. CHEN, *Finite type submanifolds and generalizations.* University of Rome, 1985.

[3] O.J. GARAY, *Finite type cones shaped on spherical submanifolds.* Proceedings A.M.S. **104** (1988), 868-870.

[4] J. SIMONS, *Minimal varieties in Riemannian manifolds.* Ann. of Math. **88** (1968), 62-105.

[5] T. TAKAHASHI, *Minimal immersions of Riemannian manifolds.* J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 380-385.