Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 1-8

Conversando sobre Hélices y recordando a Floro

Manuel Barros Díaz • Ángel Ferrández Izquierdo •

Resumen Traemos a la memoria un hecho real, donde aparece Floro resolviendo un problema de caracterización de hélices, para mostrar y encontrar la solución a idéntico problema en el contexto de la Geometría de Lorentz, y evocar la figura de nuestro amigo en las tres facetas que con tanto acierto y valentía practicó: docencia, investigación y alta gestión.

1. El almuerzo de año nuevo

Angel Ferrández: Bueno chico, cincuenta y nueve tacos, el año que viene sesenta.

Manuel Barros: Cierto, pero a tí te faltan unos días para estar lo mismo que yo.

AF: ¿Qué tal lo llevas?

MB: Dentro de lo que cabe bien, pero tengo que reconocerte que desde esta mañana estoy un poco jodido. No se me va del coco el recuerdo de Floro. Él también hubiera cumplido hoy cincuenta y nueve.

AF: Por cierto, recuerdo nuestro primer año en el Departamento, el curso 1974-75, cuando llegaba Pepito Castellano hablando maravillas de un zamorano que venía de la Universidad de Salamanca para acabar la carrera de Matemáticas en Granada. Sin embargo, la primera vez que yo lo ví fue en un bar donde íbamos algunas veces, estaba en lo que hoy es la plaza Einstein, no recuerdo su nombre pero sí que lo llevaba un hombre, ya mayor, bajito y de pelo cano. Además, habitualmente, su mujer estaba en la cocina preparando las tapas.

MB: Sí hombre, el bar Modelo, el de Nicolás y Victoria.

Manuel Barros Díaz
Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada
Campus de Fuentenueva, 18071 Granada
mbarros@ugr.es
Ángel Ferrández Izquierdo
Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia
Campus de Espinardo, 30100 Murcia
aferr@um.es

AF: Allí estaba con dos amigos, creo que también estudiaron Matemáticas.

MB: Luis Blázquez, *el Rubio*, y Rafael Verguillo, *el Pollo*.

AF: El curso siguiente, 1975-76, fue cuando Martínez Naveira llegó a Granada. Recuerdo que se encargó de una asignatura que había en el quinto curso de la antigua licenciatura de Matemáticas, aquel plan que nosotros mismos estudiamos. La asignatura se llamaba Matemática Elemental II y en ella se explicaba Geometría Diferencial.

MB: Precisamente yo me hice cargo de dar las clases de problemas en ella. Entre los estudiantes se encontraba Florentino. Recuerdo que en una primera parte de la materia se impartió la teoría clásica de curvas y superficies.

AF: Siguiendo el libro de Vidal Abascal.

MB: Cierto, y además yo disponía de una colección de problemas escritos en unas fichas, las cuales me había proporcionado Naveira. Eran los problemas que se resolvían en la Universidad de Santiago.

AF: Me acuerdo de aquella colección de problemas.

MB: En una de aquellas clases tuve mi primer contacto matemático y directo con Florentino. A partir de entonces, y hasta la lectura de su tesis doctoral, no se interrumpió.

AF: ¿Cómo recuerdas a Florentino de estudiante?

MB: Te voy a contar algo que probablemente recordarán algunas de las personas que compartían con Florentino y conmigo mismo aquella clase de problemas. Sería el mes de octubre, ya entrado, de 1975. Había que resolver uno de los problemas de alguna de las fichas que Naveira traía desde Santiago. Se trataba del teorema clásico de Lancret.

AF: Ya, el que caracteriza las hélices, las hélices generales quiero decir, por la proporcionalidad entre sus invariantes geométricos, curvatura y torsión.

MB: En efecto, se sabe que una hélice general es una curva que forma un ángulo constante, tiene pendiente constante, con una dirección fija del plano, el eje de la hélice.

AF: Pero eso es equivalente a que la torsión, τ, y la curvatura, κ, de dicha curva verifiquen una relación de proporcionalidad del siguiente tipo

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot \omega,$$

donde ω es el ángulo constante que forma con su eje.

MB: Cierto, y la cuestión es que Florentino se presentó voluntariamente para resolver en la pizarra esta equivalencia.

AF: Y ¿cómo fue la cosa?

MB: La resolución de Florentino fue rotunda, rigurosa y perfecta. En cualquier caso, fue incontestable por la manera de exponerla, llena de fuerza, convencimiento e ímpetu. Cuando hubo acabado siguió el silencio y creo que nos

faltó muy poco para aplaudir. Aquel octubre de 1975 descubrí que Floro era un todo terreno de la matemática.

AF: Oye ¿qué te parece si, aprovechando esta anécdota, escribimos sobre hélices, para recordar a Floro?

MB: Me gusta la idea ¿quizá sobre alguna extensión de la idea de hélice?

AF: Si te parece, podemos hablar de hélices en la esfera para poder invitar a la fiesta a las estructuras helicoidales cerradas, ya sabes en el sentido de tu artículo en los Proceedings de la AMS. También podríamos tomar la autopista variacional para ver a las hélices como puntos críticos de acciones relacionadas con las teorías de partículas, justo en el sentido de nuestro reciente artículo en el Journal of Mathematical Physics.

MB: Yo pienso que deberíamos tomar un camino que fuese más asequible, menos técnico, que involucre maquinaria menos sofisticada. Hay que tratar de llegar al recuerdo de Floro acompañados del mayor número posible de personas que también le querían y admiraban.

AF: Entonces, si te parece, podemos coger la vertiente relativista. Ver a las estructuras helicoidales, a las hélices, en el mismo espacio $\mathbb{R}^3$, pero cambiando la métrica Euclidea por otra con interés en Física, en Teoría de la Relatividad, por la métrica de Lorentz-Minkowski. Ya sabes que el espacio es el mismo $\mathbb{R}^3$. Este espacio, con la métrica Euclidea, se representa por $\mathbb{E}^3$, mientras que el mismo espacio con la métrica de Lorentz-Minkoski se representa por $\mathbb{L}^3$. Es decir

$$\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 - dz^2).$$

MB: Ya, tú lo que quieres es verme otra vez a vueltas con los B-scrolls. Ya sabes que me convenciste de su interés hace tiempo. Bueno, dejando al lado las bromas, me parece que has tenido una gran idea.

2. La sobremesa con café, copa y Lorentz-Minkowski

MB: Vamos a ver, la idea de ángulo en $\mathbb{E}^3$ es clara y también es manifiesto su protagonismo en la definición de hélice general. Para proceder con la idea de hélice general en $\mathbb{L}^3$, podríamos comenzar considerando la de ángulo hiperbólico.

AF: Puede ser, pero aunque tratemos con curvas no luminosas, evitaríamos una situación esencial en $\mathbb{L}^3$, cual es la posibilidad de hélices con eje luminoso.

MB: Tienes razón, entonces deberíamos ver a las hélices generales en $\mathbb{L}^3$ de otra manera diferente para no involucrar la idea de ángulo, aunque obviamente equivalente.

AF: Date cuenta que una curva, $\gamma(s)$, parametrizada por su arco en $\mathbb{E}^3$ es una hélice general si y sólamente si su indicatriz tangente $T(s) = \gamma'(s)$ está toda ella contenida en un plano, Π, de $\mathbb{E}^3$, precisamente ortogonal con su eje.

MB: Bueno, esto puede funcionar como definición de hélice general en $\mathbb{L}^3$. Si tienes una curva, $\gamma(s)$, en $\mathbb{L}^3$ que no sea tangente en ningún punto al cono de luz, lo que equivale a que en cada uno de sus trozos conexos tengas

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle > 0 \qquad \text{curva espacial, o}$$

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle < 0 \qquad \text{curva temporal,}$$

entonces puedes definir su indicatriz tangente (tangente unitario) por $T(s) = \gamma'(s)$.

AF: Claro, y además observa que esta indicatriz vive en el hiperboloide de una hoja cuando la curva es espacial, mientras que lo hace en el de dos hojas si es temporal

$$T(s) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \qquad \text{caso espacial,}$$

$$T(s) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = -1\} \qquad \text{caso temporal.}$$

MB: Ahora está claro, entenderemos que $\gamma(s)$ es una hélice general en $\mathbb{L}^3$ cuando su indicatriz tangente esté dentro de un plano, Π, y por tanto en una sección plana de uno de los dos hiperboloides anteriores dependiendo de su carácter causal. Así, escribiendo $T(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$, se tiene que

$$a \cdot x'(s) + b \cdot y'(s) + c \cdot z'(s) = \text{constante} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

AF: Fíjate en que esta ecuación la puedes escribir, usando el producto escalar en $\mathbb{L}^3$, del siguiente modo

$$\langle \gamma'(s), \vec{v} \rangle = \text{constante} \qquad \vec{v} = (a, b, -c)$$

y si ahora derivas con respecto al parámetro de la curva, obtienes

$$\langle \gamma''(s), \vec{v} \rangle = 0$$

es decir, la existencia, sobre cualquier hélice general, de un vector distinto de cero $\vec{v} \in \mathbb{L}^3$, el cual es ortogonal a la aceleración de la curva. Además, es evidente que esta propiedad caracteriza a las hélices generales de $\mathbb{L}^3$. De manera que la recta L generada por este vector funciona como una especie de eje para la correspondiente hélice.

MB: Pero claro, en contraste a lo que ocurre en $\mathbb{E}^3$ donde la forma cuadrática asociada con la métrica es definida positiva, ahora, en $\mathbb{L}^3$ los vectores se comportan, esencialmente, de dos maneras cualitativamente muy distintas frente a la correspondiente forma cuadrática

- Vectores espaciales y temporales $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$, respectivamente
- Vectores luminosos $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, con $\vec{x} \neq \vec{0}$,

lo que da lugar a, lo que a priori proporciona dos grandes familias o clases de hélices generales en $\mathbb{L}^3$. Las que tienen su eje espacial o temporal, que podríamos llamar **hélices no degeneradas**, y las que su eje es luminoso, que llamaremos **hélices degeneradas**.

AF: No obstante, a pesar de este significativo contraste entre las hélices de $\mathbb{E}^3$ y $\mathbb{L}^3$, cuando uno trata de resolver en $\mathbb{L}^3$ el resultado de Lancret, aquel que Florentino resolvió para hélices euclídeas en una clase de problemas allá por octubre de 1975, uno obtiene un resultado similar al euclídeo. Las hélices de $\mathbb{L}^3$ están caracterizadas por la proporcionalidad entre curvatura y torsión

$$\tau = r \cdot \kappa, \qquad r = \text{constante}.$$

Dentro de esta caracterización, de este resultado tipo Lancret, las hélices degeneradas vienen caracterizadas por la relación

$$\tau = \pm \kappa.$$

MB: Pienso que deberíamos profundizar más en la geometría de las hélices de $\mathbb{L}^3$, enfatizando, esencialmente, en las diferencias que presenta su estudio con respecto al caso de las hélices euclídeas.

AF: Sí, me parece bien, pero antes quiero proponerte tres cosas. La primera, que sólo depende de nosotros, es que empecemos hablando sobre la geometría de las hélices euclídeas. Las otras dos propuestas dependen del camarero, pidámosle que nos cambie el mantel para poder seguir haciendo garabatos y, aprovechando el estreno del nuevo papel, pidamos otra copa.

MB: ¿Qué tal unas cañas con unas tapas de jamón para amenizar la charla?

AF: ¡Fantástico!

3. Jamón para resolver las ecuaciones naturales de las hélices euclídeas

MB: En el curso 1978-79 Florentino ya llevaba un par de cursos en el Departamento. El primero de enero de 1979, hoy hace 32 años, yo me marchaba para Estados Unidos a realizar un estancia de larga duración y algunos compañeros del Departamento, entre ellos Florentino, se encargaron de sustituirme en las asignaturas que yo había iniciado en octubre. Como puedes imaginar, durante una buena temporada previa a mi partida, todas las reuniones del grupo de Geometría Diferencial, que no eran pocas, tanto en el Departamento como

en los sitios habituales (el Modelo, el Patio Andaluz, la Cueva, el Da Vinci, el Barrón,...), eran monográficas. Recuerdo que en una de ellas estaba conversando con Florentino sobre el temario de la Geometría III, dedicada a la teoría de curvas y superficies. Seguramente, en el primer trimestre yo ya les habría explicado la teoría de curvas y, probablemente, hablaría con Florentino sobre los contenidos desarrollados incluyendo la notación usada. En ese sentido, es muy posible que platicáramos sobre el teorema fundamental de la teoría de curvas y también del problema relativo a la resolución de las ecuaciones naturales para curvas.

AF: Yo creo que los profesores universitarios de Matemáticas tenemos, entre otros, el reto de hacer ver a los estudiantes la existencia de estrechas relaciones entre las distintas materias que impartimos. No puede ser que se produzca la sensación, entre los estudiantes, de que el Álgebra, el Análisis, la Geometría parezcan parcelas cerradas y aisladas de la matemática. En esta dirección, los geómetras, sobre todo los que explicamos Geometría Diferencial, tenemos ventaja. Los dos problemas que acabas de citar son dos buenos ejemplos que lo ilustran.

- El teorema fundamental de la teoría de curvas en $\mathbb{E}^3$ proporciona una bella correspondencia uno a uno, una biyección, entre dos conjuntos. Uno de naturaleza geométrica, el de las clases de congruencias de curvas, en el espacio $\mathbb{E}^3$, recorridas a velocidad uno; el otro, de naturaleza analítica, el de parejas de funciones reales, una de ellas positiva, de una variable. Esta biyección se consigue a través del teorema de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones diferenciales traducido o aplicado a las ecuaciones naturales para curvas. Dadas dos funciones diferenciables, κ y τ, reales en una variable y siendo la primera positiva, entonces existe (suprayectividad) una curva, única salvo movimientos rígidos de $\mathbb{E}^3$ (inyectividad), con curvatura κ y torsión τ.

- Naturalmente, a pesar del resultado anterior, no tenemos garantizada la integración explícita de las ecuaciones naturales para curvas. Para decirlo de una manera directa, imagina que te dan dos funciones, κ y τ, reales de una variable, el problema de encontrar explícitamente la curva, única salvo congruencias, que las admita como curvatura y torsión, en general no está resuelto. No existe, al menos no se conoce, ningún procedimiento, ni argumento, ni algoritmo que permita resolver, en general, las ecuaciones naturales para curvas en $\mathbb{E}^3$.

MB: Es casi seguro que en aquella conversación, mantenida a finales de 1978, con Florentino, habláramos de estos problemas, así como de la posibilidad de obtener la resolución del segundo para algunas clases de curvas. Probablemente tratáramos sobre la resolución del problema en el caso de curvas planas.

Éstas, recorridas a velocidad constante (uno), están completamente determinadas, salvo movimientos en el plano, por una única función, su curvatura. Integrándola, se obtiene el ángulo que forma la indicatriz tangente (tangente unitaria) con una dirección fija del plano y así sus coordenadas en una base ortonormal que incluya a dicha dirección. Se vuelve a integrar para obtener la curva, salvo movimientos. De modo que las ecuaciones naturales para curvas planas pueden ser resueltas por cuadraturas. También se conoce que, para casos muy particulares de funciones, las ecuaciones naturales se pueden reducir a ecuaciones diferenciales de Riccati. Estoy convencido de que en aquella ocasión tratamos sobre el problema de la resolución de las ecuaciones naturales para las hélices generales.

AF: Claro, estas curvas forman una familia típica para la que se pueden resolver las ecuaciones naturales, recuperar una hélice a partir de su curvatura y su torsión. A gran escala, si para las hélices las dos funciones, curvatura y torsión, se reducen salvo una constante, la pendiente, a una, entonces ocurre algo parecido a lo de las curvas planas. La conclusión es que uno puede realizar una integración geométrica, incluyendo cuadraturas, de las ecuaciones naturales para las hélices. La esencia de este fenómeno es la siguiente: todo el mundo conoce que una hélice circular, esto es, una curva en $\mathbb{E}^3$ con torsión y curvatura constantes, tiene la suerte de vivir enrollada en un cilindro circular recto y, además, es una geodésica del mismo. De manera que las hélices circulares en $\mathbb{E}^3$ son la misma cosa que las geodésicas de los cilindros circulares rectos de $\mathbb{E}^3$.

MB: Por otro lado, todos hemos visto estructuras helicoidales, hélices en la naturaleza, que siguen teniendo la suerte de vivir enrolladas en ciertas superficies (plantas trepadoras, cuernos y colmillos de animales, bacterias, virus, estructuras de proteínas...) de manera que podría ser que la capacidad de enrollarse no fuese una cualidad exclusiva de las hélices circulares. Así, te propongo el siguiente experimento. Tomemos una curva parametrizada por su arco, o recorrida a velocidad uno, $\delta(s)$ con $s \in \mathbb{R}$, que esté contenida en un plano Π de $\mathbb{E}^3$ y sea $\vec{\xi}$ un vector unitario perpendicular a dicho plano. Trasladando la curva en la dirección del vector obtenemos el cilindro recto con directriz (o sección) la curva δ y generatrices rectas paralelas a $\vec{\xi}$, es decir

$$\mathbf{C}(\delta, \vec{\xi}) = \{\delta(s) + t\,\vec{\xi} \,:\, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Se trata de una superficie llana, ya que su curvatura de Gauss se anula idénticamente. Por lo que sus geodésicas se obtienen como imágenes de las rectas del plano por la siguiente aplicación (recubrimiento Riemanniano)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{C}(\delta, \vec{\xi}) \qquad \Phi(s,t) = \delta(s) + t\,\vec{\xi}.$$

Tomando una de ellas, lo cual significa elegir una pendiente, θ, la que forma la

recta con el plano,

$$\gamma_\theta(u) = \Phi(u.\sin\theta, u.\cos\theta),$$

ahora puedes calcular la curvatura y la torsión de esta curva en $\mathbb{E}^3$. Si representas por ρ a la curvatura de la directriz δ, en el plano Π obtienes

$$\kappa = (\sin^2\theta)\,\rho \qquad \tau = (\sin\theta\,\cos\theta)\,\rho.$$

Entonces

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta \qquad \text{y.....} \quad \textbf{¡bingo!}$$

obtienes que las geodésicas de los cilindros rectos sobre curvas planas son hélices generales en $\mathbb{E}^3$

AF: Lo que redondea esta faena es que el recorrido que has hecho tiene retorno, aquí los pájaros no se comieron las migas de pan. Fíjate, si te dan una hélice general, $\gamma(s)$, en $\mathbb{E}^3$, entonces su curvatura y su torsión satisfacen

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} = r,$$

y a partir de aquí puedes calcular θ mediante $\cot\theta = r$ y después la función $\rho = \frac{\kappa}{\sin^2\theta}$, así que tienes el siguiente algoritmo

- En un plano Π tomas una curva, parametrizada por su arco, cuya función curvatura sea ρ. Ésto, como sabes, lo puedes hacer mediante cuadraturas.
- A continuación consideras el cilindro recto cuya directriz es la curva $\delta(s)$ y con generatrices perpendiculares a Π
- En este cilindro tomas la geodésica, α, con pendiente θ, obtienes así una curva, hélice general, cuyas curvatura y torsión coinciden con las de la hélice general dada. La unicidad en el teorema fundamental de la teoría de curvas garantiza que las dos hélices se pueden superponer mediante movimientos rígidos de $\mathbb{E}^3$, son congruentes.

Tienes que convenir conmigo que este argumento proporciona un elegante procedimiento geométrico para resolver las ecuaciones naturales para hélices Euclideas.

MB: Sí, y al mismo tiempo un ejemplo más de la profunda conexión que existe entre la Geometría Diferencial y las Ecuaciones Diferenciales. A propósito de diferenciabilidad, si nos vamos a meter en el berenjenal de la hélices en $\mathbb{L}^3$, y teniendo en cuenta la dualidad hora-estómago, no estaría de más que pidiéramos una cenita **suave**.

AF: Otra vez estamos de acuerdo.

4. Una cena ligera para resolver las ecuaciones naturales de las hélices en $\mathbb{L}^3$

AF: Para comenzar el estudio de las hélices no degeneradas en $\mathbb{L}^3$, podríamos mimetizar el experimento realizado anteriormente en $\mathbb{E}^3$. Quiero decir, puedes considerar un plano, Π, no degenerado (euclídeo o lorentziano), entonces tomas una curva, $\delta(s)$, no nula, es decir, que su vector tangente no sea luminoso en todos sus puntos (que nunca sea tangente al cono de luz). En esas condiciones cabe la posibilidad de considerar el cilindro recto cuya directriz es la curva dada y generatrices ortogonales al plano Π. Obtienes así una superficie llana que es siempre de Lorentz cuando el plano Π sea euclídeo, mientras que es de Riemann o de Lorentz según que la curva $\delta(s)$ sea espacial o temporal en el plano lorentziano Π.

MB: Eso está bien y no es caro, formalmente tenemos un zoo de cilindros similar al de los cilindros euclídeos, aunque ahora aparecen de dos tipos: riemannianos y lorentzianos, según dicten los caracteres causales de la directriz y de la generatriz elegidas.

AF: Claro, ahora puedes diseñar un experimento paralelo al realizado en $\mathbb{E}^3$. Empiezas tomando una geodésica, no nula, de cualquiera de los cilindros construídos, no importa que sea riemanniano o lorentziano. Entonces calculas su curvatura y su torsión en $\mathbb{L}^3$ y vuelves a cantar bingo, quiero decir que ambas son proporcionales y por lo tanto se trata de una hélice no degenerada en $\mathbb{L}^3$. Ahora continúas sorprendiéndote, pues el camino inverso sigue siendo posible: toda hélice no degenerada en $\mathbb{L}^3$ la puedes ver como una geodésica no nula de un cilindro con directriz no nula. Acabas comprendiendo que hélices no degeneradas en $\mathbb{L}^3$ y geodésicas no nulas de cilindros rectos sobre curvas planas no nulas son la misma cosa.

MB: Excelente, aunque demasiado similar al caso euclídeo. Para concluir con resultados drásticamente diferentes, para obtener diferencias esenciales entre las teorías de las hélices en $\mathbb{E}^3$ y en $\mathbb{L}^3$, parece obvio que tenemos que considerar ideas naturales en $\mathbb{L}^3$ que simultáneamente sean imposibles en $\mathbb{E}^3$. En resumen, investigar las hélices degeneradas en $\mathbb{L}^3$. Es el momento de invitar a nuestra cena a los **B-scrolls**.

AF: Estas superficies, hasta donde yo sé, fueron introducidas por L.Graves, discípulo de K.Nomizu, en su tesis doctoral publicada en los Transactions de la AMS en el año 1979. Desde entonces han jugado un papel fundamental, como sabes, para entender la geometría de $\mathbb{L}^3$.

MB: Sí que lo sé, aunque tuviera que pasar algún tiempo, justo el que gasté en probar algún resultado, para convencerme. Hoy reconozco que proporcionan una estructura necesaria para entender $\mathbb{L}^3$. Estas superficies son lorentzianas y tienen la suerte de estar generadas por curvas luminosas.

AF: Empiezas con una curva luminosa, $\alpha(s)$, en el espacio $\mathbb{L}^3$, lo que implica que su tangente $A(s) = \alpha'(s)$ está en el cono de luz en cada instante y así $\langle A(s), A(s)\rangle = 0$. Recordarás que para este tipo de curvas se puede tomar una referencia que juegua un papel parecido al de la referencia de Frenet en las curvas clásicas. Ahora se llama referencia de Cartan a lo largo de α y es de la forma $\{A, B, C\}$, siendo A y B vectores nulos y C espacial, es decir, $\langle A, A\rangle = 0$, $\langle B, B\rangle = 0$ y $\langle C, C\rangle = 1$. Además, $\langle A, B\rangle = -1$, $\langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0$ y las ecuaciones que se corresponderían con las de Frenet se escriben ahora de la forma

$$\begin{aligned} A' &= f\,C, \\ B' &= a\,C, \\ C' &= a\,A + f\,B, \end{aligned}$$

donde f es una función a lo largo de α y a una constante no nula. En estas condiciones, puedes considerar, la superficie reglada $S_{\alpha,B}$ parametrizada por $X(s,t) = \alpha(s) + t\,B(s)$. Esto es lo que se llama B-scroll sobre la curva α. La curvatura de Gauss de esta superficie es constante y se anula si, y sólo si, $a = 0$. En este caso, de B-scroll llano, observa que nos hemos colocado en una situación análoga al caso Euclídeo, es decir, que hemos construído una especie de cilindro sobre α.

MB: Perfecto, mi "cilindro" se corresponde con el caso en que la dirección B es paralela a lo largo de la curva α, lo que es equivalente a que ésta sea una cúbica nula (o luminosa) generalizada. Si tomas una geodésica no nula (no luminosa) $\gamma(u) = \alpha(s(u)) + t(u)B(s(u))$ de $S_{\alpha,B}$, entonces puedes usar el campo traslacional $\hat{B}$ en $\mathbb{L}^3$, determinado por B, que induce un campo de Killing, que seguiremos denotando por B, a lo largo de γ, de longitud constante, tal que $\langle \gamma'(u), B\rangle = -s'(u)$ es constante, ya que la geodésica γ es la imagen por X de una línea recta. Si ahora recordamos el teorema de Lancret, deducimos que γ es una hélice degenerada en $\mathbb{L}^3$.

AF: Me toca convencerte de que el recíproco también es cierto. Para ello tomas una hélice degenerada β que puedes parametrizar con velocidad constante, es decir, $\langle \beta', \beta'\rangle = c$ constante. El socorrido teorema de Lancret te dice que las funciones curvatura κ y torsión τ de β coinciden (cambiando la orientación si fuera necesario) y el campo aceleración de β es espacial. Si $\{T, N, B\}$ es la referencia de Frenet a lo largo de β, defines los siguientes campos

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \tfrac{|\beta'|}{2}(T + B) \\ \hat{B} &= -\tfrac{\varepsilon_1}{|\beta'|}(T - B) \\ \hat{C} &= N, \end{aligned}$$

donde ε_1 es el caracter causal de β y $|\beta'| = \sqrt{\varepsilon_1 c}$.

¿Qué te parece el procedimiento?

MB: No está mal, pues observo que el campo $\hat{A}$ es luminoso, así que tomaré α como una curva integral de $\hat{A}$. Además, he comprobado que el conjunto $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ es una referencia de Cartan a lo largo de α, de manera que calculando $\hat{C}'$, y comparándolo con la expresión que hemos visto antes, deducimos que $a = 0$ y que $f = \kappa|\beta'|$. Ello me invita a considerar el $\hat{B}$-scroll llano $S_{\alpha,\hat{B}}$ parametrizado por $X(s,t) = \alpha(s) + t\,\hat{B}(s)$. Finalmente, basta elegir la geodésica γ de $S_{\alpha,\hat{B}}$ definida por $\gamma(s) = \alpha(s) + m\,s\,\hat{B}(s)$, donde $m = -c/2$. Un cálculo directo nos lleva a que γ y β tienen idénticas funciones curvatura y torsión, y el mismo carácter causal, así que no les queda más remedio que ser congruentes en $\mathbb{L}^3$.

AF: Claro, donde has usado la versión lorentziana, quiero decir en $\mathbb{L}^3$, del teorema fundamental de curvas. Por cierto, hace veinte minutos que entramos en el día dos.

5. Acabando con un brindis

AF: Manolo, yo creo que ha quedado meridianamente claro que trabajar en el mundo de Lorentz merece la pena siempre que las cosas que te encuentres no tengan su contrapartida en la geometría de Riemann. Dicho de otra manera, buscar lo nuevo que geométricamente puede aportar $\mathbb{L}^3$, en comparación con $\mathbb{E}^3$, y calibrar su importancia. Precisamente es lo que hemos pretendido en nuestra conversación sobre las hélices. La presencia de esa especie de "cilindros especiales" propios de $\mathbb{L}^3$, los B-scrolls, nos aporta esa frescura. Recuerdo que fue Alfonso Romero, en 1990 y con relación a problemas que estábamos considerando en la tesis de Pascual Lucas, el que me habló por primera vez de unos ejemplos muy novedosos y me insistió en que había que explotarlos. No lo dudamos y en apenas dos años, pudimos dar las gracias a Alfonso en un artículo en el Pacific Journal of Mathematics.

MB: Pasan ya los veinte años de aquello. Entonces yo seguía cómodo en la geometría de Riemann y reconozco que me incomodaba aquello de introducir "los epsilons" en las ecuaciones de Frenet, es decir, los caracteres causales de los campos tangente, normal y binormal a lo largo de una curva. Me resistía como gato panza arriba, hasta que tuvimos que buscar soluciones de la ecuación de Betchov-Da Rios en el espacio anti de Sitter y las encontramos mediante los B-scrolls. Fue en un artículo de los Comptes Rendues de 1995. Desde entonces, eso de trabajar con métricas indefinidas ya no me resulta tan agobiante, tanto es así que me habrás oído decir en público que "estoy enamorado del espacio anti de Sitter".

AF: A propósito, ¿sabes que el artículo que acabas de mencionar fue nuestra primera colaboración?

MB: Pues no lo recordaba. En cualquier caso, y desde entonces, habremos colaborado en aproximadamente doce o catorce artículos en revistas del JCR. Incluyendo, claro está, la etapa correspondiente a tu paso por el vicerrectorado.

AF: Cuatro años, desde 1998 hasta 2002. ¿Sabes que coincidí con Florentino, él vicerrector en Granada y yo en Murcia?

MB: Claro, Florentino fue vicerrector durante ocho años y unos meses, desde abril 1992 hasta noviembre de 2000. En todo caso, una parte de toda una vida dedicada a la Universidad.

AF: Créeme si te digo, y lo hago por experiencia, que son bastantes los que creen que la gestión universitaria es una actividad menor. Probablemente sin pensar, o sin querer reconocer, que para seguir investigando, para seguir enseñando, debe haber alguien cuya ocupación gestora proporcione a otros las mejores condiciones posibles para materializar las actividades investigadora y docente.

MB: Claro, lo que ocurre es que, paralelamente, pero en el otro sentido, no todos los que se dedican a la gestión universitaria entienden lo que has dicho. Para entenderlo, yo creo que, en primer lugar, tienes que saber lo que significa investigar y enseñar. Además, debes comprender que investigación y docencia constituyen los dos pilares necesarios para que exista la Universidad.

AF: Yo creo que lo que acabas de decir se puede ver como un resumen del perfil universitario de Florentino. De manera que, siendo un gran investigador y un excelente profesor, entendió y, lo que es más difícil, materializó su idea de hacer gestión universitaria siempre al servicio de la investigación y la docencia, al servicio de la Universidad.

MB: Mira Angel, como bien sabes, salvo algunos pocos años fuera de la Universidad de Granada, llevo aquí, en su Departamento de Geometría y Topología, desde 1974. Durante tanto tiempo, he vivido casi de todo. En mis primeros tiempos nuestra única dedicación, quiero decir la de los profesores, era justo la de hacer de profesores, enseñar de la mejor manera que podíamos. Después, pudimos aprender lo que era investigar gracias a la ayuda de personas como Martínez Naveira o Bang Yen Chen, pero aún así la gestión que se hacía en la Universidad estaba muy alejada y, ni mucho menos, facilitaba nuestra entonces recién estrenada actividad investigadora. Justo en aquella etapa, Florentino realizó su tesis doctoral. Yo no podría decir que desde entonces, seguramente sería desde mucho antes, probablemente por ser como era, Florentino inició su actividad de gestión en la Universidad de Granada. Eligió, de todos, el camino menos sencillo, pero la labor que se hizo desde entonces en mi Departamento, creo que en todos los Departamentos de esta Universidad, empezó a ser la de una Universidad moderna.

AF: Sí, yo creo que su actividad de gestión en la Universidad de Granada ha coincidido con la etapa en la que ésta ha despegado para convertirse en una Universidad moderna y con un excelente prestigio internacional.

MB: Para finalizar esta intensa entrada de año, te propongo, en reconocimiento de todo lo que Florentino nos ha enseñado, y en recuerdo de su continuo ejemplo como excelente universitario, un brindis con este magnífico y recio vino de Toro, provincia de Zamora, donde nació Floro.

AF y MB: ¡En memoria y recuerdo de Floro, nuestro amigo que se fue¡