

# Geometría y Topología para entender las hélices de la Naturaleza

Angel Ferrández Izquierdo

San Alberto 2009



## Dirac dixit

En 1939 Paul Dirac escribió: *The research worker, in his effort to express the fundamental laws of Nature in mathematical form, should strive mainly for mathematical beauty. It often happens that the requirements of simplicity and beauty are the same, but where they clash the latter must take precedence.*

# Hélices por doquier

Las configuraciones helicoidales son estructuras muy abundantes en la Naturaleza. Aparecen tanto a nivel microscópico (biomoléculas, fibras bacterianas, nanoestructuras, cadenas de proteínas, y en particular ADN, etc.), como en fenómenos macroscópicos (cuerdas, sogas, plantas trepadoras, bobinas, cuernos de cabras montesas, vórtices, etc.).

Introducción: Hélices en la Naturaleza

Curvatura y torsión

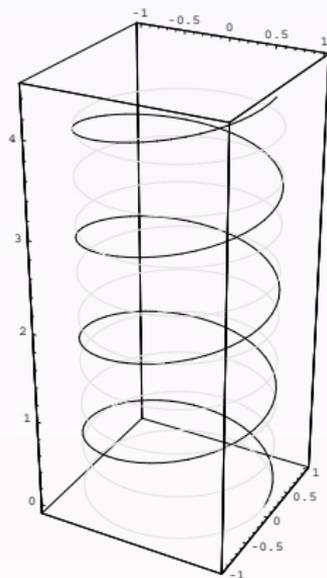
Hélices generalizadas

Una manera geométrica de ver las hélices

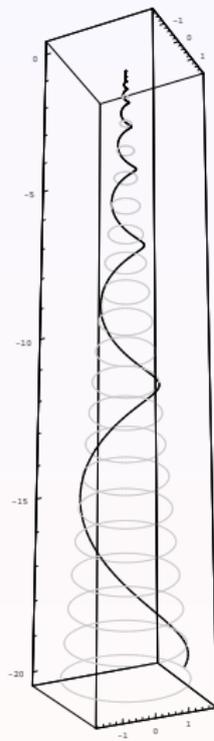
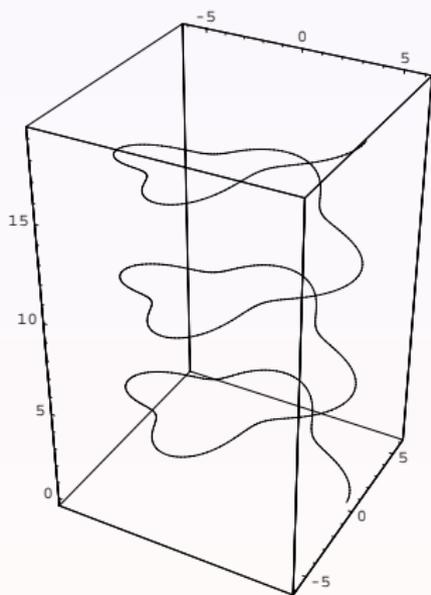
Pero hay más

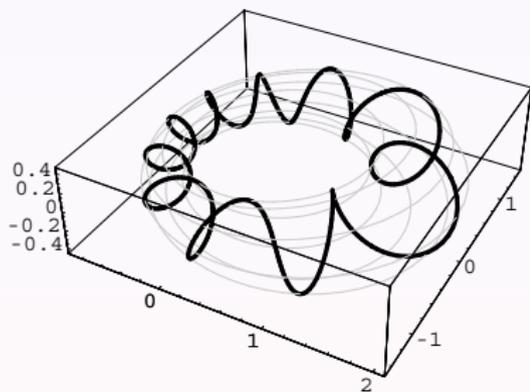
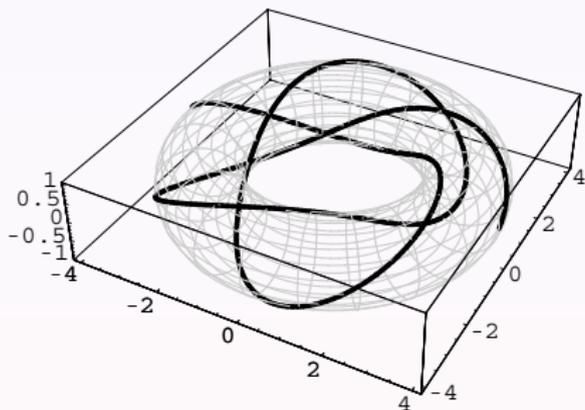
Cambiando la idea clásica de hélice





$$f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$





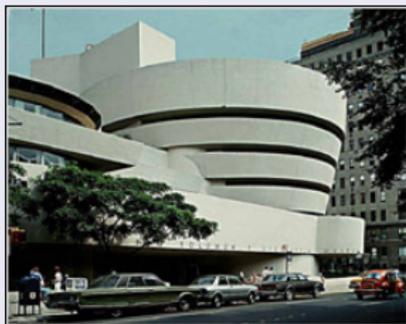
## Hélices por doquier

- Hélices famosas. Las de Leonardo da Vinci, para numerosas construcciones y como precursoras del helicóptero. Las de Hitchcock, en películas como *Vértigo* en la que reitera los primeros planos del moño en forma de hélice de Kim Novak o de la sangre colando por la bañera en *Psicosis*.



## Hélices por doquier

- En la Arquitectura: Antoni Gaudí (parque Güell y diseño de las columnas arboladas de la Sagrada Familia), Frank Lloyd Wright (Museo Guggenheim de New York), etc.



## Hélices por doquier

- En la Música. Por poner un par de ejemplos más o menos actuales, *Los ángeles no tienen hélices* de El Último de la Fila, 1988. El grupo llamado *Twisted helices* hace música libre, sin copyright.
- En la Tecnología: tornillos, sacacorchos, bobinas, turbinas y motores, etc.
- En la gastronomía... ¡y hasta en la sopa!

## Hélices en Biología

En particular, su interés en Biología está estrechamente relacionado con el conocido, dentro de la comunidad de biólogos, Teorema de Pauling: *Objetos idénticos, regularmente ensamblados, forman una hélice.*

Parece que el éxito de la configuración helicoidal, como una forma popular en las moléculas, se debe a que la naturaleza trabaja de la mejor manera contra las restricciones existentes. La forma espiral del ADN viene dictada por el espacio disponible en una célula, así como la forma de una escalera de caracol obedece al tamaño de un apartamento.

# Curvatura y torsión de una hélice

## Curvatura

Aplastemos una hélice sobre un plano. Entonces su **curvatura**  $k$  es una función que mide cuánto se dobla la curva aplastada en cada punto de dicho plano.

## Torsión

Dejémosla ahora que recobre su posición primitiva. Entonces llamamos **torsión**  $\tau$  a la función que mide cuánto se levanta en cada punto la curva respecto del plano anterior.

## Ejemplo de la hélice circular recta

$$k = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \quad \tau = \frac{ab}{a^2 + b^2}$$

## En busca del modelo

En la construcción de nuestro modelo consideraremos una estructura helicoidal como un objeto unidimensional o curva. Inconscientemente se suele pensar en el modelo más simple, es decir, en una *hélice circular*.

Sin embargo, esto está muy lejos de la realidad. Nadie puede creer que las arpillas subiendo a un árbol recorren un arco de una hélice circular; en primer lugar, porque la sección cruzada del tronco de un árbol no es circular, pero además el eje del tronco no es una exactamente recto.

Otro ejemplo, muchos tipos de bacterias (*Escherichia coli*, *Salmonella typhimurium*) nadan mediante la rotación de flagelos filamentosos suficientemente flexibles como para adoptar distintas formas helicoidales diferentes a la circular.

## La caracterización

Por consiguiente, la cuestión que nos planteamos es:

**¿Cómo construir un modelo matemático para describir las formas helicoidales de la Naturaleza?**

Se define **una hélice generalizada** como una curva  $\gamma(s)$  cuyo vector tangente  $\gamma'(s)$  forma un ángulo constante con una dirección fija  $\vec{v}$ , el eje de la hélice, con  $\|\vec{v}\| = \text{const.}$

**Una curva es una hélice generalizada si y sólo si sus funciones torsión y curvatura están en proporción constante**

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{const.}$$

Sea  $\alpha : [0, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular plana, parametrizada por su arco, en el plano  $\Pi$  ortogonal al vector unitario  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . El cilindro recto  $\mathcal{C}_\alpha$ , con generatrices rectas paralelas a  $\vec{x}$  y sección cruzada la curva dada, puede ser parametrizado por

$$\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(s, u) = \alpha(s) + u\vec{x}.$$

Sabemos que  $\mathcal{C}_\alpha$  es una superficie llana cuya geometría está codificada en la de su sección cruzada,  $\alpha$ . En particular, las geodésicas de  $\mathcal{C}_\alpha$  son las imágenes por  $\phi$  de las rectas en el plano Euclideo, es decir

$$\gamma(t) = \phi(at, bt) = \alpha(at) + bt\vec{x},$$

Un cálculo sencillo permite probar que

$$\kappa_\gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \kappa_\alpha \quad \text{and} \quad \tau_\gamma = \frac{ab}{a^2 + b^2} \kappa_\alpha.$$

Por tanto,

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} = \frac{b}{a}.$$

Como consecuencia

**Toda geodésica de un cilindro recto sobre una curva plana es automáticamente una hélice cuyo eje es el del cilindro.**

Así pues,

Sea  $\gamma$  una curva regular en el espacio, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 Es una hélice, esto es, forma un ángulo constante con una dirección fija.**
- 2 La proporción entre su curvatura y su torsión es constante, la pendiente.**
- 3 La curva es una geodésica en un cilindro recto sobre una curva plana.**

## Un problema variacional

*Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite possible (Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Lyon 1756, Vol IV, page 36).*

### Problema

Encontrar funciones  $F(\kappa, \tau)$  para que los puntos críticos del funcional de energía, sobre un cierto espacio  $\Lambda$  de curvas,

$$\mathcal{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\gamma) = \int_{\gamma} F(\kappa, \tau) ds,$$

sean hélices generalizados.

$$\mathcal{F}_{mnp}(\gamma) = \int_{\gamma} (m + n\kappa + p\tau) ds,$$

**Los puntos críticos de esta acción para  $m = 0$ , son justamente las hélices generalizadas con pendiente  $h = p/n$ .**

## Hélices generalizadas cerradas

Está claro que no existen hélices generalizadas cerradas en el espacio euclídeo, ya que su campo tangente siempre tiene una componente positiva, precisamente en la dirección del eje.

Ahora bien, se conoce un gran número de proteínas circulares en bacterias, plantas y animales cuyos componentes aparecen formando hélices que se cierran.

Tenemos, pues, que proponer un modelo que describa tanto las proteínas circulares como otras configuraciones más complicadas de cadenas de proteínas.

## Un experimento: las curvas de Weiner

Para  $n \in \mathbb{N}$ , la curva

$$\gamma_n(t) = \left( \left( \frac{n - \cos t}{n} \right) \cos\left(\frac{t}{n}\right); \left( \frac{n - \cos t}{n} \right) \sin\left(\frac{t}{n}\right); \frac{\sin t}{n} \right),$$

es cerrada con período  $2\pi n$ , se enrolla  $n$  veces alrededor del toro de revolución obtenido al girar la circunferencia con centro  $(1, 0, 0)$  y radio  $1/n$  alrededor del eje  $z$ .

Estas curvas cerradas, en cierto sentido, tienen pinta de ser un tipo de hélices y... claramente existen en la naturaleza.

Dada una curva  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definimos la función  $\mu : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\mu(t) = \tau(t)/\kappa(t)$  y entonces consideramos la anchura de su gráfica

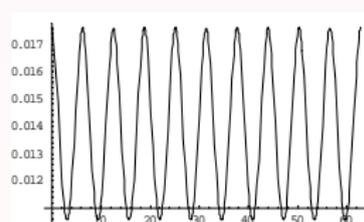
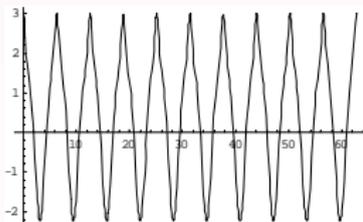
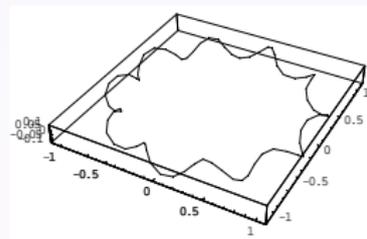
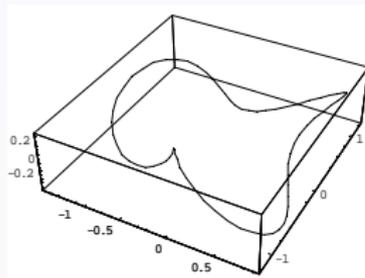
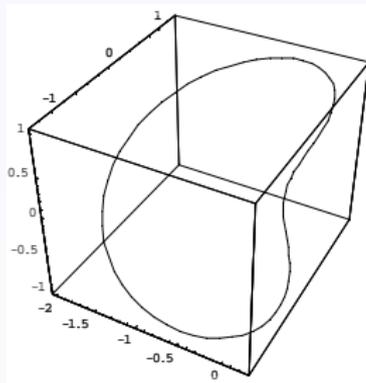
$$B[\mu] = \max_{[0, L]} \mu - \min_{[0, L]} \mu,$$

si calculamos la anchura,  $B[\mu_n]$ , correspondiente a la gráfica  $\mu_n$  correspondiente con la curva  $\gamma_n$  en uno de sus periodos, digamos en  $[0, 2\pi n]$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{B[\mu_n]\} = 0.$$

en este sentido, **estas curvas se pueden ver como un tipo de hélices generalizadas en el infinito.**

Prefacio  
Introducción: Hélices en la Naturaleza  
Curvatura y torsión  
Hélices generalizadas  
Una manera geométrica de ver las hélices  
**Pero hay más**  
Cambiando la idea clásica de hélice



## El eje, pieza clave.

Necesitamos cambiar la idea clásica de hélice de manera obvia. Hemos de relajar la condición de que el eje sea una recta.

**¿El eje podría ser un campo de vectores?**

**Un detalle crucial.** Las curvas anteriores,  $\gamma_n$ , forman ángulo constante con respecto a un campo rotacional, es decir, un campo cuyas curvas integrales son círculos.

### Definición

Dado un campo de vectores  $X$  sin ceros, las hélices con eje  $X$  ( $X$ -hélices) son las curvas que forman un ángulo constante con las curvas integrales de dicho campo.

## Aclarando la situación: de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{S}^3$

### Tres pasos

Para describir las hélices cerradas intentamos aprovechar lo que conocemos en  $\mathbb{R}^3$  para modificar y mejorar lo que se crea oportuno.

(i) Eje: el campo de Killing da paso a un campo de Killing conforme.

**Problemas:** (1) pasar de rectas a círculos; y (2) el paralelismo euclídeo dará paso al paralelismo de Clifford.

(ii) Los cilindros de  $\mathbb{R}^3$  dan paso a los tubos de Hopf de  $\mathbb{S}^3$ .

**Problema:** Construir los tubos de Hopf via la aplicación de Hopf.

(iii) Los resultados obtenidos en  $\mathbb{S}^3$  los llevamos a  $\mathbb{R}^3$  mediante la proyección estereográfica.

## Primera caracterización de las hélices en $\mathbb{S}^3$

### Hélices generalizadas en $\mathbb{S}^3$ (versión curvaturas)

En primer lugar, M. Barros [General helices and a theorem of Lancret. *Proc. AMS*, **125** (1997), 1503-1509] probó que

una curva  $\gamma$  en  $\mathbb{S}^3$  es una hélice generalizada si y sólo si ya

(i)  $\tau = 0$  y por tanto  $\gamma$  está en  $\mathbb{S}^2$ , totalmente geodésica en  $\mathbb{S}^3$ ; ya

(ii) Las curvaturas de  $\gamma$  satisfacen

$$\tau = a \kappa \pm 1, \quad \text{siendo } a \text{ una constante.}$$

## La aplicación de Hopf

$$\Pi : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R},$$

$$\Pi(z_1, z_2) = \left( z_1 \bar{z}_2, \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) \right).$$

$$H(\zeta) = i\zeta, \quad \forall \zeta \in \mathbb{S}^3,$$

es un campo de Killing de longitud constante que define el flujo vertical de la sumersión riemanniana  $\Pi$ .

Es el llamado **campo de Hopf**.

## Tubos de Hopf

$$\delta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2)$$

$$\mathbf{T}_\delta = \Pi^{-1}(\delta)$$

es una superficie llana en  $\mathbb{S}^3$ , llamada **el tubo de Hopf sobre  $\delta$** . Se puede parametrizar como  $X(s, t) = e^{it} \bar{\delta}(s)$ , siendo  $\bar{\delta}$  un levantamiento horizontal de  $\delta$ .

### Hélices generalizadas en $\mathbb{S}^3$ (versión geodésica)

Una curva  $\gamma$  en  $\mathbb{S}^3$  es una hélice generalizada si, y sólo si, salvo movimientos de  $\mathbb{S}^3$ , es una geodésica de un tubo de Hopf.

## El paralelismo de Clifford

$$\mathbb{S}^3 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} : |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$$

$$e^{it} z = (e^{it} z_1, e^{it} z_2)$$

$$\Pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2)$$

$$\Pi(z) = [z] = \{e^{it} z : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{it} z)|_{t=0} = iz$$

## El paralelismo de Clifford

Las órbitas son grandes círculos de  $\mathbb{S}^3$  que satisfacen la siguiente propiedad:

si  $C$  y  $C'$  son dos de tales círculos, entonces

$$d(u, C') = d(v, C'), \quad \forall u, v \in C.$$

**Definición.** Dos círculos máximos  $C$  y  $C'$  de  $\mathbb{S}^3$  se dicen Clifford paralelos si  $d(z, C')$  no depende de  $z \in C$ .

En tal caso se escribirá  $C \parallel C'$ .

Dados un círculo máximo  $C$  de  $\mathbb{S}^3$  y  $\theta \in [0, \pi]$ , se define

$$C_\theta = \{x \in \mathbb{S}^3 : d(z, C) = \theta\}.$$

## Observaciones.

(i)  $C_0 = C$ ,  $C_{\frac{\pi}{2}} = C^\perp$ ,  $C_{\pi-\theta} = C_\theta$ ,  $C_{\frac{\pi}{2}-\theta} = C_\theta^\perp$ , donde  $C^\perp$  representa el círculo máximo obtenido al cortar  $\mathbb{S}^3$  por el plano ortogonal al plano que contiene a  $C$ .

(ii)  $C_\theta = \{z = (z_1, z_2) : |z_1| = \cos\theta, |z_2| = \sin\theta\}$ , es decir, es un toro.

(iii) Dados un círculo máximo  $C$  de  $\mathbb{S}^3$  y  $\theta \in [0, \pi]$ , para cada  $z \in C_\theta$ , existen exactamente dos círculos máximos  $C'$  (de primera especie) y  $C''$  (de segunda especie) a través de  $z$  que son Clifford paralelos a  $C$ . Además,  $C' \neq C''$  si  $z \in \mathbb{S}^3 - \{C \cup C^\perp\}$ .

(iv) El paralelismo de Clifford no es una relación de equivalencia, pero se puede descomponer en dos.

## Los círculos de Villarceau

El flujo de circunferencias máximas Clifford paralelas a  $C$  se puede obtener a partir de la acción de un grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^3$ . Justo el que permite obtener la fibración de Hopf. Por tanto, el flujo está generado por el campo de Hopf (traslación infinitesimal de la tres esfera)

$$H(z) = iz.$$

El paralelismo de Clifford nos descubre dos familias (de primera y segunda especie) de círculos, **los círculos de Villarceau**. Basta razonar con una de ellas, la primera -por ejemplo- que genera el campo de Villarceau  $V$ , que se obtiene inmediatamente como la proyección estereográfica del campo de Hopf  $H$ .

## Flujo de Villarceau

Dado  $z_0 \in \mathbb{S}^3$ , tómese un círculo máximo  $C$  por  $z_0$  y considérese la proyección estereo

$$E_0 : \mathbb{S}^3 - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

En  $\mathbb{R}^3$  se toma un sistema de coordenadas tal que el eje  $Z$  sea  $E_0(C)$ .

Entonces,  $\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $E_0(C_\theta) = T_\theta$  es un toro de revolución en  $\mathbb{R}^3$  con radios  $\frac{1}{\cos \theta}$  y  $\operatorname{tg} \theta$ , de manera que

$$\left\{ T_\theta : \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

es una foliación de  $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje } Z\}$ .

## A modo de resumen

Al considerar el flujo de Villarceau para estudiar hélices en  $\mathbb{R}^3$  lo que hacemos es cambiar el paralelismo euclídeo del flujo de rectas paralelas (generatrices de cilindros) por la proyección conforme (conservación de ángulos) del paralelismo de Clifford.

La ventaja es evidente, pues las líneas de flujo son círculos, antesala para que las hélices puedan cerrar.

En este contexto, las dos familias de círculos de Villarceau en  $T_\theta$  se obtienen como las imágenes por  $E_0$  de las dos familias de círculos máximos en  $C_\theta$  que son Clifford paralelas a  $C$ . Cada una de ellas constituye una foliación de  $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje } Z\}$ .

Se tiene entonces el **campo de Villarceau**

$$V = d\mathbf{E}_o(H), \quad H = \text{Hopf},$$

cuyas curvas integrales son los círculos de Villarceau.

**Las  $V$ -hélices son las hélices de Villarceau, entre las que se encuentran las conocidas  $\gamma_n$  de Weiner.**

En cualquier caso, el siguiente resultado las describe geoméricamente.

# Hélices de Villarceau

**Las  $V$ -hélices son loxodromas, con respecto al flujo de Villarceau, en tubos de Hopf conformes. Así, están completamente determinadas por:**

- (1) una función que hace el papel de curvatura de su sección cruzada conforme**
- (2) y un número real que determina la pendiente con respecto al flujo.**

**Las  $V$ -hélices cerradas quedarán determinadas por una ligadura racional sobre la pendiente.**

## El problema variacional en $\mathbb{S}^3$

Hemos visto, pues, que las  $V$ -hélices son exactamente las geodésicas de los tubos de Hopf. En consecuencia, ellas están determinadas por una función que hace el papel de curvatura en  $\mathbb{S}^2(1/2)$  de la sección cruzada del tubo y una constante que indica la pendiente de la geodésica en el tubo.

Hélices generalizadas en  $\mathbb{S}^3$  (versión variacional)

Estas hélices son, además, extremales de un funcional energía del siguiente estilo

$$\mathcal{F}_{np} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_{np}(\gamma) = \int_{\gamma} (p + n\kappa + p\tau) ds.$$

con  $p/n$  como pendiente de las hélices.

## Cerrando hélices

Sea  $\delta$  una curva cerrada en  $\mathbb{S}^2(1/2)$ , entonces  $\mathbf{T}_\delta$  es un toro. Para determinar su tipo de isometría se considera la aplicación recubridora

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}_\delta, \quad X(s, t) = e^{it} \bar{\delta}(s),$$

y se ve que  $\mathbf{T}_\delta$  es isométrico a  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el retículo plano generado por  $(L, 2A)$  and  $(0, 2\pi)$ , siendo  $L > 0$  la longitud de  $\delta$  y  $A \in (-\pi, \pi)$  es el área que  $\delta$  encierra en  $\mathbb{S}^3(1/2)$ . Como consecuencia una hélice generalizada en  $\mathbb{S}^3$  es cerrada si, y sólo si, su pendiente  $h$  satisface  $h = \frac{1}{L}(2A + q\pi)$ ,  $q \in \mathbb{Q}$  rational. La existencia de hélices generalizada cerradas en un toro de Hopf está garantizada por la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{S}^2(1/2)$ . A saber,

$$L^2 + (2A - \pi)^2 \geq \pi^2.$$

## Cerrando hélices

Por tanto, en el plano  $(L, 2A)$  se define la región

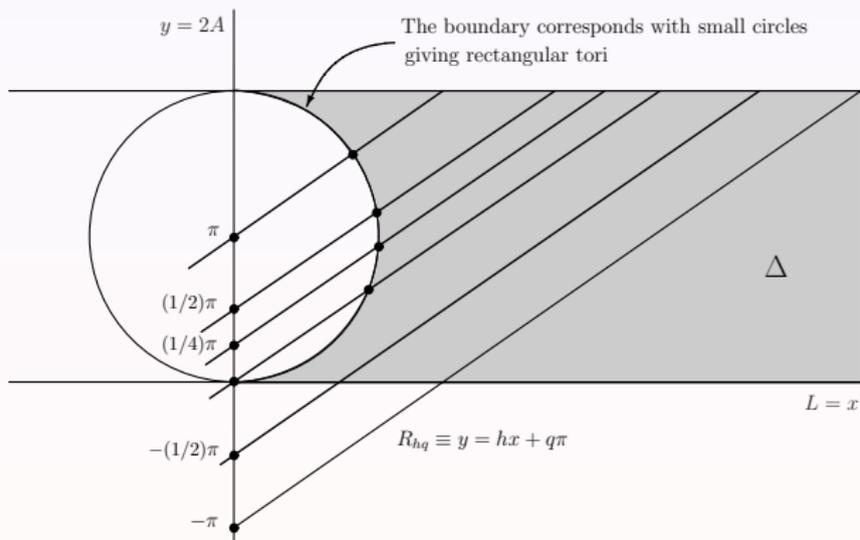
$$\Delta = \{(L, 2A) : L^2 + (2A - \pi)^2 \geq \pi^2 \text{ and } 0 \leq A \leq \pi\}.$$

Para cualquier punto  $a = (L, 2A) \in \Delta$  existe una curva embebida y cerrada  $\delta^a$  en  $\mathbb{S}^2(1/2)$  de longitud  $L$  y área encerrada  $A$ . La geodésica de pendiente  $h$  en el toro de Hopf  $\mathbf{T}_{\delta^a}$  es cerrada si, y sólo si,  $h = \frac{1}{L}(2A + q\pi)$ , es decir, la recta en el plano  $(L, 2A)$  de pendiente  $h$  corta al eje  $2A$  a una altura que es un múltiplo racional de  $\pi$ . Así pues, el espacio de hélices generalizada cerradas en  $\mathbb{S}^3$  es la región del plano

$$\Delta \cap \left( \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left( \frac{p}{n} L - 2A = q\pi \right) \right).$$

## Hélices cerradas

El espacio de hélices cerradas se obtiene mediante un principio de cuantización y se identifica con la región del plano de la figura.



## Resumen

Tres principios son los que hemos encontrado para explicar las hélices de la naturaleza

### Variacional

Las estructuras helicoidales que aparecen en la Naturaleza son puntos críticos de una cierta energía.

### Topológico

La topología será necesaria para explicar las estructuras helicoidales cerradas.

### Cuantización

Para una pendiente  $h$  dada, las hélices circulares cierran cuando la ordenada en el origen de la recta que proceden es un múltiplo racional de  $\pi$ .