Reconsiderando el Universo como infinito y eterno

Enero de 2011

Antonio Hernández Alemán

eufrouno@gmail.com

Resumen

Se analiza el desplazamiento al rojo de las galaxias en el modelo de Universo estático, suponiendo que la causa del desplazamiento está relacionada con la concepción de la gravedad como una fuerza que empuja, y no como una fuerza que atrae. Desde esta suposición se llega a 4 modelos teóricos. Para desplazamientos al rojo inferiores a 0.1, se compara la relación observada entre distancia y desplazamiento al rojo, con los 4 modelos encontrados, hallando una estrecha relación con el valor numérico de la constante de gravitación universal. Se calcula el valor de la K-correction a aplicar en el caso de considerar el Universo como estático y se compara con la K-correction aplicada según el modelo del Big-Bang, encontrando que: K-correction Big-Bang + 2.5 log(1+z) = K-correction Universo estático. Se corrigen con este valor las magnitudes aparentes publicadas por Super Nova Cosmoly Proyect para valores de $z \leq 1$, y se construye el diagrama de Hubble con estas magnitudes corregidas. A continuación se compara el diagrama de Hubble con los 4 modelos, encontrando que uno de ellos se ajusta razonablemente bien.

Introducción

Tal vez se descartó con demasiada facilidad que el Universo sea infinito, eterno y macroestructuralmente análogo en cualquier época. Esto sucedió al interpretar el desplazamiento al rojo de las galaxias como un efecto Doppler debido a una supuesta velocidad de alejamiento. Surgió así la teoría del Big-Bang, hoy día ampliamente aceptada, quizás por motivos culturales o ideológicos más que por motivos meramente científicos. Pero la teoría del Big-Bang, a cambio de explicar el desplazamiento al rojo, plantea nuevas preguntas cuyas respuestas parece que solo se obtienen si nos salimos de lo físico científico y entramos en el terreno de lo metafísico o incluso de lo religioso.

Cabe preguntarse si no existe otra explicación para el desplazamiento al rojo, explicación que no involucre una velocidad de alejamiento de las galaxias.

En la Teoría de la Relatividad General se afirma que los fotones son influidos por los campos gravitatorios. También desde la teoría de la Relatividad Especial se llega a la misma conclusión, más concretamente se afirma que si la luz se mueve en sentido contrario a un campo gravitatorio, su longitud de onda se desplaza al rojo, y si se mueve en el mismo sentido se desplaza al azul. Esto se conoce como corriento al rojo gravitacional, y hoy día lo consideramos como un hecho demostrado.

Parece entonces un camino adecuado para encontrar una explicación alternativa al desplazamiento al rojo de las galaxias, el pensar que de alguna manera, la luz en su avance por el Universo se ve sometida a una fuerza de sentido contrario a su movimiento, y con ello tendremos un desplazamiento al rojo sin velocidad de alejamiento de las galaxias, es decir sin expansión del Universo.

No es el objetivo de este escrito el estudio de la causa que genera esa posible fuerza que se opondría al movimiento de la luz. Más bien en este escrito, partiendo de la existencia de esa fuerza y dentro del modelo de Universo estático, se estudia de qué modo afectaría a la propagación de la luz. Aún sin saber a qué se debe esa fuerza, podemos encontrar las "leyes" que rigen su interacción con la luz, e incluso su intensidad. Esta situación sería parecida a lo que ocurre con el caso de la gravedad: conocemos su ley, llamada Ley de Newton de la Gravitación, y el valor experimental de su constante, $G = 6{,}672 \times 10^{-8}$ dinas cm^2 g^{-2}, sin embargo no sabemos qué la produce.

Aún sin el ánimo de entrar en el análisis de la causa que genera esa fuerza, si parece apropiado explicar someramente la idea, pues ha originado este escrito. La idea general consiste en considerar la gravedad como una fuerza de empuje, no como una fuerza de atracción. Esta fuerza llegaría de todas partes del Universo por

igual (su procedencia podrían ser las emisiones electromagnéticas de todo cuanto compone el Universo, es decir, la gravedad sería un empuje producido por las radiaciones electromanéticas, pero esto por supuesto tampoco lo vamos a tratar en este escrito). Concebir la gravedad como un empuje, no como una atracción, está totalmente en concordancia con la Ley de Newton de la Gravitación, no cambiando su ecuación. El mecanismo que la hace parecer una atracción es el siguiente: Un cuerpo alejado suficientemente de otros cuerpos recibe el empuje gravitacional con igual intensidad en los dos sentidos de cada dirección, de forma que la resultante de esas dos fuerzas es nula para cada dirección, y en consecuencia el cuerpo no experimenta ninguna aceleración. Sin embargo, supongamos que colocamos un segundo cuerpo cerca del primero y trazamos la linea recta que pasa por ambos cuerpos. Tenemos así una dirección sobre la cual podemos definir el sentido "del primer cuerpo al segundo" y el sentido contrario, "del segundo cuerpo al primero". El segundo cuerpo absorbe o neutraliza parte del empuje gravitacional que llegaría al primero en el sentido "del segundo al primero", como si le hiciese "sombra", de forma que el primer cuerpo recibe en el sentido "del segundo al primero" un empuje gravitacional menor de lo "normal", mientras que en el sentido contrario, "del primero al segundo", recibe el empuje normal. Por ello la resultante de esos dos empujes no es nula, sino un empuje en el sentido "del primero al segundo", y con esto el primer cuerpo se ve empujado hacia el segundo y aparenta ser atraído por este. Con un razonamiento análogo, el primer cuerpo también hace sombra al empuje que recibiría el segundo, con lo que este último también es empujado hacia el primero, aparentando ser atraído por este. Esta concepción de la gravedad como empuje, afectaría también a la luz si aceptamos la dualidad onda corpusculo para la luz y el resto de emisiones electromagnéticas, ya que su parte "material" se vería afectada igualmente por el empuje gravitacional. Pero vamos mas allá, la luz en su avance por el Universo, dado que se va encontrando con el empuje gravitacional que fluye en su contra, recibe mayor empuje justo en el sentido contrario a su avance, que el empuje que recibiría una partícula que no se moviese, y a la vez al moverse en el mismo sentido del empuje que fluye en su mismo sentido, recibe menor empuje justo en el mismo sentido de su avance, que el empuje que recibiría una partícula que no se moviese, de tal modo que la resultante de estos dos empujes, el que recibe en contra y el que recibe a favor, no es nula sino que es un empuje contrario a su avance, que puede interpretarse como el resultado de una aceleración gravitatoria contraria a su movimiento, y esto ocurre sea cual sea la dirección y sentido de su movimiento. También podría intuirse que el empuje sería de alguna forma proporcional a la velocidad de la luz, pues estaría causado precisamente por su movimiento con respecto al empuje gravitacional. O sea, que

si la luz aumentase su celeridad aumentaría el empuje en contra de su movimiento. Bien, hemos de abandonar aquí este tema tan interesante pues hemos prometido no tratarlo en este escrito.

Antes de continuar es importante aclarar que cuando medimos el desplazamiento al rojo de la luz procedente de galaxias lejanas, lo que realmente miden nuestros aparatos es un aumento de la longitud de onda de esa luz, no se mide directamente su frecuencia. También recordamos que nunca se ha medido la velocidad de la luz que nos llega de tales galaxias, y por ello en principio podemos considerar que podría ser distinta a la velocidad que normalmente manejamos, ya que siempre se ha medido la velocidad de la luz utilizando fuentes de luz muy cercanas si las comparamos con la distancia a estas galaxias. No contradice esta posibilidad la Teoría Especial de la Relatividad, ya que en ella lo que se afirma es que diferentes observadores inerciales medirán la misma velocidad para la luz. Tampoco entra en conflicto con la controvertida Teoría General de la Relatividad, ya que incluso algunos autores hablan de variación de la velocidad de la luz en presencia de campos gravitatorios. Incluso en la ecuaciones de Maxwell sobre ondas electromagnéticas, donde la velocidad de la luz aparece como constante, habría que estudiar si dejaría de ser constante al actuar una fuerza externa, o por el hecho de estar el vacío realmente lleno de "sopa" electromagnética. Pero todas estas cuestiones tan interesantes también sobrepasan el propósito de este escrito, de modo que resumimos este párrafo diciendo que la única certeza que tenemos, porque así lo hemos medido, es que la longitud de onda aumenta, y además la velocidad de la luz que nos llega de tan lejos no se ha medido aún y podría ser diferente a la que se considera como constante universal.

Hechas las aclaraciones necesarias, entramos ya en lo que es el objetivo de este escrito. En primer lugar presentamos un resumen de lo que vamos a hacer y de lo que vamos a obtener, a modo de índice explicativo.

Indice explicativo

Sección 1

Se analiza que ha de suceder para que se produzca un desplazamiento al rojo suponiendo que el Universo es estático. Surgen varias posibilidades. Cada una de ellas conduce a un modelo teórico que se analiza en las secciones siguientes.

En todos los modelos se parte de la existencia de una aceleración que se opo-

ne al moviniento de la luz, y se analiza la relación entre desplazamiento al rojo y distancia a la que fué emitida la luz, es decir tendremos una fórmula para el valor de la distancia en función del desplazamiento al rojo, que solo dependerá del valor numérico de la aceleración respectiva. Para determinar el valor numérico de estas aceleraciones, solo tenemos que comparar los resultados teóricos obtenidos en cada modelo, con los datos observados que relacionan desplazamiento al rojo y distancia. Solo disponemos de este tipo de datos para valores de desplazamiento al rojo inferiores a 0,1. Sorprendentemente obtenemos para las aceleraciones respectivas un valor numérico muy similar al de la constante de Gravitación Universal.

Sección 2

Velocidad de la luz constante, con aceleración en contra del movimiento de la luz también constante.

Sección 3

Velocidad de la luz creciente. Este modelo se subdivide a su vez en tres, que se analizan en las secciones 4, 5 y 6.

Sección 4

Velocidad de la luz creciente, con aceleración de su movimiento directamente proporcional a la velocidad.

Sección 5

Velocidad de la luz creciente, con aceleración de su movimiento constante.

Sección 6

Velocidad de la luz creciente, con aceleración de su movimiento inversamente proporcional a la velocidad.

Hasta aquí, los 4 modelos con las aceleraciones obtenidas, encajan bien con lo observado para desplazamientos al rojo inferiores a 0.1. Sin embargo, para valores superiores de desplazamiento al rojo, los 4 modelos definen comportamientos muy diferentes entre sí para la distancia en función del desplazamiento al rojo. Se hace preciso comparar los modelos con los datos observados para valores superiores de desplazamiento al rojo. Pero para estos valores no poseemos datos de distancias,

sino de magnitudes aparentes de supernovas, esto es, solo disponemos de una medida de la cantidad de luz que nos llega de esas estrellas. Dado que las estrellas de ese tipo emiten una cantidad de luz similar, se podría hacer una estimación de las distancias a que se encuentran de nosotros, teniendo en cuenta que la cantidad de luz que recibimos de una de ellas, disminuye con el cuadrado de la distancia que nos separa. Pero la medición de esa cantidad de luz no es sencilla por diversos factores, siendo el más relevante precisamente, la alteración en la longitud de onda causada por el desplazamiento al rojo, ya que la luz que fué emitida en una banda, nos llegará en una banda más larga, por ejemplo lo que se emitió en la banda azul, podría llegarnos en la infrarroja. En estas condiciones, para hacer comparaciones de la cantidad de luz se utiliza un factor de corrección llamado K-correctión, que hasta ahora se ha calculado suponiendo cierta la teoría del Big-Bang, o sea que la fuente que emitió la luz se alejaba de nosotros justo a la velocidad necesaria para producir su desplazamiento al rojo por efecto Doppler. Evidentemente esta K-correctión no sirve para el propósito de este escrito, pues precisamente estamos considerando la posibilidad de que no exista tal velocidad de alejamiento. Recalculamos pues la K-correctión desde la perspectiva del Universo estático, dando como resultado que hay que restar $2{,}5log(1+z)$ a la magnitud publicada en los estudios, siendo z el desplazamiento al rojo. Estos datos de magnitudes corregidos, los podemos traducir a distancias y compararlos con cada uno de los modelos. De todo esto se trata en las secciones siguientes.

Sección 7 y Sección 8

Se describen las correcciones necesarias a las magnitudes calculadas según el modelo del Big-Bang, para adaptarlas al modelo de Universo estático.

Sección 9

Se analiza en profundidad la diferencia entre la K-correction según el modelo del Big-Bang y el modelo de Universo estático.

Sección 10

A partir de la magnitudes publicadas y calculadas según el modelo del Big-Bang, se obtienen las magnitudes para el modelo Universo estático. Con esas magnitudes corregidas se calculan las distancias, y con ellas las relaciones entre desplazamientos al rojo y distancias.

Sección 11

Se comparan estas relaciones con cada uno de los cuatro modelos teóricos.

Sección 12

Se observa que el modelo, Velocidad de la luz creciente, con aceleración de su movimiento directamente proporcional a la velocidad, encaja razonablemente bien. También se expone que habría que hacer para perfeccionar estos modelos, adaptándolos a las condicones reales de la observación de supernovas.

Apéndice

Se propone un método observacional para determinar la velocidad con la que llega la luz procedente de galaxias lejanas.

1. Desplazamiento al rojo considerando el Universo estático

Analizamos aquí qué ha de suceder para que se produzca un desplazamiento al rojo de la longitud de onda, suponiendo que el Universo es estático.

Supongamos una fuente de luz alejada de un observador y ambos en reposo uno respecto al otro. Sea λ_0 la longitud de onda de la luz emitida y sea λ_1 la longitud de onda de la luz recibida por el observador. Se define el desplazamiento al rojo y se denota por la letra z al cociente

$$z = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0}$$

ecuación que también suele escribirse como

$$(1+z) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

de donde obtenemos el valor de λ_1 en función de λ_0y de z

$$\lambda_1 = \lambda_0(1+z) \tag{1.1}$$

Sean c_0 la celeridad de la luz cuando es emitida por la fuente, ν_0 la frecuencia de la luz cuando es emitida por la fuente, c_1 la celeridad de la luz cuando llega al observador, y ν_1 la frecuencia de la luz cuando llega al observador. Por la definición

de onda tenemos las relaciones

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{\nu_0} \qquad\qquad \lambda_1 = \frac{c_1}{\nu_1}$$

si sustituímos estos valores en la ecuación (1.1) obtenemos

$$\frac{c_1}{\nu_1} = \frac{c_0}{\nu_0}(1+z)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{\nu_1}{\nu_0}(1+z) \tag{1.2}$$

es decir, el cociente entre las velocidades ha de ser mayor que el cociente entre las frecuencias justo en el factor $(1+z)$. Además, el cociente entre esos dos cocientes define el valor del desplazamiento al rojo.

Tenemos 5 posibilidades para que se produzca un desplazamiento al rojo, son las siguientes:

Velocidad de la luz constante con frecuencia decreciente

Si $c_1 = c_0$ entonces se ha de cumplir, según la ecuación (1.2)

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{1}{(1+z)}$$

es decir la frecuencia observada es menor que la emitida justo en el factor $\frac{1}{(1+z)}$.

Velocidad de la luz creciente con frecuencia constante

Si $\nu_1 = \nu_0$ entonces se ha de cumplir, según la ecuación (1.2)

$$c_1 = c_0(1+z)$$

es decir, la velocidad con que llega la luz al observador es mayor que la velocidad de la luz cuando fué emitida, justo en el factor $(1+z)$.

Velocidad de la luz creciente con frecuencia decreciente

En este caso, tanto la variación de la velocidad como de la frecuencia contribuyen al desplazamiento al rojo, es decir cualquier aumento de la velocidad de la luz, y cualquier disminución de la frecuencia, supondrán un desplazamiento al rojo. No hay condiciones pues para el aumento de velocidad ni para la disminución de la frecuencia.

Velocidad de la luz creciente con frecuencia creciente

En este caso el aumento de la velocidad de la luz contribuye al desplazamiento al rojo, mientras que el aumento de la frecuencia disminuye el desplazamiento al rojo, y por tanto el aumento relativo de la velocidad ha de ser mayor que el aumento relativo de la frecuencia. Es decir, la velocidad ha de aumentar más de lo que lo hace la frecuencia.

Velocidad de la luz decreciente con frecuencia decreciente

En este caso la disminución de la velocidad de la luz disminuye el desplazamiento al rojo, mientras que la disminución de la frecuencia lo aumenta, y por tanto la disminución relativa de la velocidad ha de ser menor que la disminución relativa de la frecuencia. Es decir, la velocidad ha de disminuir menos de lo que lo hace la frecuencia.

De estas 5 posibilidades analizaremos solo las 2 primeras, Velocidad de la luz constante con frecuencia decreciente, y Velocidad de la luz creciente con frecuencia constante, pues nos parecen más coherentes y sobre todo sencillas, dejando las otras 3 para tal vez ulteriores estudios. La primera, que considera la velocidad de la luz constante, viene avalada precisamente por la aceptación general de esa constancia, y por la teoría corpuscular de la luz, que la supone compuesta por fotones, que pueden variar su frecuencia. Sin embargo si consideramos la emisión electromagnética como una onda, para un flujo de emisión constante, tendremos un tren de ondas, compuesto por ν_0 crestas en cada segundo, es decir de la fuente surgen ν_0 crestas en cada segundo, y cualquier observador en reposo respecto a la fuente y a cualquier distancia, recibirá el mismo número de crestas por segundo, ya que si recibiese menor cantidad supondría que algunas crestas habrían desaparecido, y las crestas no pueden desaparecer, por tanto la frecuencia no puede cambiar. La única posibilidad para que el número de crestas no varíe y al mismo tiempo la longitud de onda aumente, es que aumente la velocidad de la onda. Esto avala la segunda posibilidad. En conclusión, las dos primeras posibilidades son coherentes y al mismo tiempo incompatibles la una con la otra.

2. Velocidad de la luz constante

Cómo varía la frecuencia de un fotón sometido a una aceleración constante

Imaginemos el nacimiento de un fotón, cuando se produce la emisión electromagnética y el fotón comienza su recorrido por el Universo. Llamemos ν_0 a la frecuencia con la que nace el fotón. Suponemos que el fotón, en su desplazamiento por el Universo, se ve sometido a una aceleración gravitatoria, $-g$, constante y de sentido contrario a su avance.

Pasado un tiempo el fotón se encuentra a distancia x del lugar de emisión. Su frecuencia será $\nu(x)$. El fotón se comporta como si tuviese una masa equivalente a $m(x) = \dfrac{h\nu(x)}{c^2}$, siendo h la constante de Planck y c la celeridad de la luz. A lo largo de este escrito emplearemos el término masa del fotón para referirnos a esa masa con la que parece comportarse. La energía del fotón al nacer es $E_0 = h\nu_0$, y cuando alcanza la distancia x es $E(x) = h\nu(x)$. Queremos saber como varía la frecuencia del fotón en función de la distancia recorrida desde el lugar donde fué emitido.

Podemos hacer este cálculo por dos métodos diferentes obteniendo el mismo resultado, como es de esperar. El primer método es similar al empleado en el experimento de Pound y Rebka para medir el cambio de frecuencia del fotón afectado por el campo gravitatorio de la Tierra [1]. El razonamiento es el siguiente:

Como el fotón ha de vencer la aceleración g, va aumentando su energía potencial y va perdiendo su propia energía en la misma medida. Así

$$E_0 = E(x) + E_{Potencial}(x)$$

de forma que

$$E(x) = E_0 - E_{Potencial}(x)$$

La fuerza que se necesita para que la masa del fotón, $m(x)$, venza la aceleración g es

$$F(x) = m(x)g = \frac{h\nu(x)}{c^2}g$$

La energía potencial ganada al pasar a la distancia x desde el lugar de emisión, es

[1] Para mayor información puede consultarse el libro: Mecánica, berkeley physics course - volumen 1. Capítulo 14, Principio de Equivalencia, Masa gravitatoria de los fotones.

el trabajo realizado por la fuerza entre esos dos lugares

$$E_{Potencial}(x) = \int_0^x F(u)du = \int_0^x \frac{h\nu(u)}{c^2} g du = \frac{hg}{c^2} \int_0^x \nu(u)du$$

sustituyendo en la ecuación $E(x) = E_0 - E_{Potencial}(x)$ tenemos

$$h\nu(x) = h\nu_0 - \frac{hg}{c^2} \int_0^x \nu(u)du$$

eliminado h de ambos miembros nos queda

$$\nu(x) = \nu_0 - \frac{g}{c^2} \int_0^x \nu(u)du$$

esta ecuación tiene por solución única

$$\nu(x) = \nu_0 e^{-\frac{g}{c^2}x} \tag{2.1}$$

como puede verse si derivamos con respecto a x ambos miembros de la ecuación

$$\nu(x) = \nu_0 - \frac{g}{c^2} \int_0^x \nu(u)du$$

haciendo uso del Primer Teorema Fundamental del Calculo, y obtenemos

$$\frac{d\nu(x)}{dx} = -\frac{g}{c^2}\nu(x)$$

y esta ecuación diferencial la resolvemos reordenando términos e integrando ambos miembros

$$\int \frac{d\nu(x)}{\nu(x)} = \int -\frac{g}{c^2} dx$$

y obtenemos

$$\ln \nu(x) + A_1 = -\frac{g}{c^2}x + A_2$$

siendo A_1 y A_2 constantes de integración. Unimos las dos constantes de integración en una sola, A y nos queda

$$\ln \nu(x) = -\frac{g}{c^2}x + A$$

aplicamos la definición de logaritmo natural

$$\nu(x) = e^A e^{-\frac{g}{c^2}x}$$

Para determinar A calculamos el valor de ν a distancia 0, esto es, la frecuencia con la que se emitió el fotón, que hemos llamado ν_0 y así nos queda

$$\nu_0 = e^A e^{-\frac{g}{c^2}0} = e^A e^0 = e^A$$

y la ecuación nos queda finalmente

$$\nu(x) = \nu_0 e^{-\frac{g}{c^2}x}$$

que es la ecuación (2.1).

Para obtener la longitud de onda $\lambda(x)$ en función de la distancia recorrida, sustituimos en la ecuación (2.1), $\nu(x)$ por $\frac{c}{\lambda(x)}$

$$\frac{c}{\lambda(x)} = \frac{c}{\lambda_0} e^{-\frac{g}{c^2}x}$$

que es lo mismo que

$$\frac{c}{\lambda(x)} = \frac{c}{\lambda_0} \frac{1}{e^{\frac{g}{c^2}x}}$$

y eliminando c del numerador de ambos miembros tenemos

$$\lambda(x) = \lambda_0 e^{\frac{g}{c^2}x} \tag{2.2}$$

Se podría haber llegado al mismo resultado operando desde el principio con longitudes de onda en lugar de con frecuencias, empleando las siguientes ecuaciones para la energía de un fotón y para su masa,

$$E(x) = \frac{hc}{\lambda(x)}\ , m(x) = \frac{h}{c\lambda(x)}$$

El otro método para llegar a estas mismas ecuaciones no utiliza el concepto de energía potencial sino el de momento. Sea $m(t)$ la masa del fotón en función

del tiempo, considerando que la emisión se produce en el momento $t = 0$. La aceleración, $-g$, a la que se ve sometido el fotón, produce una fuerza sobre él

$$F(t) = m(t)(-g) = -m(t)g$$

Por otra parte, de la propia definición de fuerza como la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento, $p(t) = m(t)c$, tenemos

$$F(t) = \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d\left[m(t)c\right]}{dt} = \frac{dm(t)}{dt}c + m(t)\frac{dc}{dt}$$

y al ser la velocidad constante, el valor del segundo sumando de la ecuación anterior es cero, y nos queda

$$F(t) = c\frac{dm(t)}{dt}$$

esto es, la fuerza solo provoca una variación de la masa. Ahora igualamos las dos ecuaciones que hemos hallado para la fuerza

$$-m(t)g = c\frac{dm(t)}{dt}$$

y reordenando términos queda así

$$\frac{dm(t)}{m(t)} = -\frac{g}{c}dt$$

Para resolver esta ecuación integramos ambos miembros

$$\int \frac{dm(t)}{m(t)} = \int -\frac{g}{c}dt$$

y nos queda

$$\ln m(t) + A_1 = -\frac{g}{c}t + A_2$$

unimos las dos constantes de integración en una sola

$$\ln m(t) = -\frac{g}{c}t + A$$

aplicamos la definición de logaritmo natural y queda

$$m(t) = e^A e^{-\frac{g}{c}t}$$

y si calculamos el valor de esta igualdad para $t = 0$ obtenemos

$$m(0) = e^A e^{-\frac{g}{c}0} = e^A$$

y la ecuación nos queda definitivamente como

$$m(t) = m(0)e^{-\frac{g}{c}t}$$

Si queremos expresar la masa con respecto a la distancia recorrida x desde el momento $t = 0$, dado que $t = \frac{x}{c}$ nos quedaría

$$m(x) = m(0)e^{-\frac{g}{c^2}x}$$

Si ahora sustituímos el valor de las masas en función de la frecuencias, es decir

$$m(0) = \frac{h\nu(0)}{c^2} = \frac{h\nu_0}{c^2}$$

$$m(x) = \frac{h\nu(x)}{c^2}$$

la ecuación que expresa la masa en función del espacio recorrido se transforma en

$$\frac{h\nu(x)}{c^2} = \frac{h\nu_0}{c^2}e^{-\frac{g}{c^2}x}$$

que se reduce a

$$\nu(x) = \nu_0\, e^{-\frac{g}{c^2}x}$$

que es la ecuación (2.1) obtenida con el método de la diferencia de potencial.

Relación entre g y z

Por definición, el desplazamiento al rojo, z, de una linea espectral, es la diferencia entre las longitudes de onda observada $\lambda(x)$ y emitida λ_0, en unidades de longitud de onda emitida. Esto es

$$z = \frac{\lambda(x) - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda(x)}{\lambda_0} - 1$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor de $\lambda(x)$ por el obtenido en la ecuación (2.2), $\lambda(x) = \lambda_0 e^{\frac{g}{c^2}x}$, obtenemos

$$z = \frac{\lambda_0 e^{\frac{g}{c^2}x}}{\lambda_0} - 1 = e^{\frac{g}{c^2}x} - 1$$

esta relación puede escribirse también como

$$1 + z = e^{\frac{g}{c^2}x} \tag{2.3}$$

Tomamos logaritmos naturales

$$\ln(1+z) = \frac{g}{c^2}x$$

y de esta ecuación obtenemos las dos siguientes

$$x = \frac{c^2}{g}\ln(1+z) \tag{2.4}$$

$$g = \frac{c^2}{x}\ln(1+z) \tag{2.5}$$

Las distancias extragalácticas normalmente se expresan en Megaparsecs, Mpc, por ello vamos a calcular las ecuaciones anteriores con la distancia expresada en Mpc, que denotaremos con la letra D, g la expresaremos en cm/s^2, y c en cm/s. Tomamos la equivalencia

$$1\,Mpc = 3{,}08568 \times 10^{24}\,cm$$

De este modo la ecuación (2.3) que expresa z en función de la distancia queda así

$$1 + z = e^{\frac{g}{c^2}D \times 3{,}08568 \times 10^{24}} \tag{2.6}$$

la ecuación (2.4) que expresa la distancia en función de g y z queda

$$D = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{c^2}{g}\ln(1+z) \tag{2.7}$$

y la ecuación (2.5) que expresa el valor de g en función de la distancia y z queda

$$g = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{c^2}{D} \ln(1+z) \tag{2.8}$$

Con ayuda de la ecuación (2.8), que define el valor de g en función de D y z, podríamos calcular el valor de g para cada galaxia con z conocido y distancia estimada, y tomar la media de esos valores para g, o utilizar cualquier otro método estadístico apropiado. Pero ahora no lo haremos así, si no que nos serviremos de las estimaciones ya realizadas para el valor de la Constante de Hubble.

Relación entre g y la constante de Hubble H_0

La constante de Hubble, H_0, viene dada por la ecuación

$$z = \frac{H_0}{c} D$$

siendo z el desplazamiento al rojo, D la distancia expresada en Mpc, y $c = 299792\,Km/s$ la celeridad de la luz. Despejando D tenemos

$$D = \frac{c}{H_0} z$$

Para determinar el valor de g basándonos en el valor de H_0 y de z, sustituimos en la ecuación (2.8) el valor de D por el que acabamos de obtener, y así expresaremos g como función de z y H_0

$$g = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{c^2\,(cm/s)^2}{\frac{c\,(Km/s)}{H_0} z} \ln(1+z) = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{c^2\,(cm/s)^2}{c\,(Km/s)} \frac{H_0}{z} \ln(1+z)$$

donde hemos puesto entre paréntesis las unidades correspondientes de c^2 y de c para que no haya confusiones. La constante numérica que aparece en la ecuación anterior, sería conveniente denotarla con una letra, solo para facilitar la notación. Sea B esa letra, o sea que

$$B = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{c^2\,(cm/s)^2}{c\,(Km/s)}$$

cuyo valor numérico es

$$B = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{\left(2{,}99792 \times 10^{10}\right)^2}{299792} \simeq 9{,}7155894 \times 10^{-10}$$

Con esto la ecuación que define g quedaría

$$g = B\frac{H_0}{z}\ln(1+z)$$

y si queremos expresar que g es función de z y H_0, sería conveniente escribirla como $g(z,H_0)$, y así tenemos

$$g(z,H_0) = B\frac{H_0}{z}\ln(1+z)$$

La estimación del valor de H_0 ha variado, y sigue haciéndolo, según se observa un mayor número de galaxias con mayor precisión. Vamos a considerar los valores del Hubble Space Telescope Key Proyect, donde se determina el valor $H_0 = 71 \pm 6$ para desplazamientos al rojo $z \leq 0{,}1$.

Vamos a calcular el valor máximo y mínimo de $g(z,H_0)$ considerando pues que $65 \leq H_0 \leq 77$ y que $0 < z \leq 0{,}1$, observando que si fijamos z entonces $g(z,H_0)$ es creciente en H_0, y que si fijamos H_0 entonces $g(z,H_0)$ es decreciente en z, con lo cual el valor mínimo de g se obtendrá con z máximo y H_0 mínimo, y el valor máximo de g con z mínimo y H_0 máximo. Veamosló.

$g(z,H_0)$ es creciente en H_0 si $\dfrac{\partial g(z,H_0)}{\partial H_0} > 0$, pero esto es evidente pues

$$\frac{\partial g(z,H_0)}{\partial H_0} = \frac{\partial}{\partial H_0}\left(B\frac{H_0}{z}\ln(1+z)\right) = B\frac{\ln(1+z)}{z}$$

y todos los terminos son positivos.

$g(z,H_0)$ es decreciente en z si $\dfrac{\partial g(z,H_0)}{\partial z} < 0$ para $z > 0$, veamosló

$$\frac{\partial g(z,H_0)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(B\frac{H_0}{z}\ln(1+z)\right) = BH_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right)$$

con lo cual solo hemos de ver que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right) < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right) = \frac{\dfrac{1}{1+z}z - \ln(1+z)}{z^2}$$

cuyo signo depende solo del numerador pues el denominador es siempre positivo, luego hemos de probar que

$$\frac{z}{1+z} - \ln(1+z) < 0$$

esto es idéntico a probar que la función $f(z) = \ln(1+z) - \frac{z}{1+z} > 0$ para $z > 0$. Para $z = 0$ se cumple $f(z) = 0$. Si probamos que $f(z)$ es creciente entonces será positiva para $z > 0$. $f(z)$ es creciente si su derivada es positiva

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{1}{1+z} - \frac{1+z-z}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1+z-1}{(1+z)^2} = \frac{z}{(1+z)^2}$$

que es siempre > 0 para $z > 0$, y con ello $\frac{\partial g(z,H_0)}{\partial z} < 0$, y $g(z,H_0)$ es decreciente en z fijado H_0.

Determinación del valor de g para $z \leq 0{,}1$

Teniendo en cuenta estos resultados podemos deducir que la función $g(z,H_0)$ alcanzará el valor mínimo cuando z sea máximo y H_0 sea mínimo, o sea $z = 0{,}1$ y $H_0 = 65$, y este valor es

$$g(0{,}1,65) = B\frac{65}{0{,}1}\ln(1+0{,}1) = 6{,}0189 \times 10^{-8}\, cm/s^2$$

De la misma forma $g(z,H_0)$ alcanzará el valor máximo cuando z sea mínimo y H_0 sea máximo. Como $g(z,H_0)$ no está definida para $z = 0$ tomamos un valor lo suficientemente pequeño para z, por ejempo $z = 0{,}001$, y $H_0 = 77$ y el valor de $g(z,H_0)$ es

$$g(0{,}001,77) = B\frac{77}{0{,}001}\ln(1+0{,}001) = 7{,}4773 \times 10^{-8}\, cm/s^2$$

La media de estos dos valores extremos es $g = 6{,}7481 \times 10^{-8}\, cm/s^2$. Hemos obtenido un valor que sorprendentemente se aproxima mucho al valor numérico, hallado empíricamente, para la constante de gravitación universal, $G = 6{,}672 \times 10^{-8}\, dina{\cdot}cm^2/g^2$.

Gráficas

Para dibujar el diagrama de Hubble, es decir la relación entre z y distancia, necesitamos tomar un valor para g. Tomamos el valor numérico igual al de G, la constante de gravitación universal, y denotamos a esta aceleración con el símbolo $\hat{G}$ para diferenciarlo de G, porque aunque tengan el mismo valor numérico, tienen diferente ecuación de dimensiones. Es decir, consideramos que $\hat{G} = g = 6{,}672 \times 10^{-8}\, cm/s^2$ es el valor de la aceleración que afecta a la luz en contra de su movimiento. Podríamos haber tomado para g cualquier valor dentro del rango hallado, pero tomamos $\hat{G}$ porque es más bonito. Con esta notación la ecuación (2.4) queda

$$x = \frac{c^2}{\hat{G}} \ln(1+z) \tag{2.9}$$

A continuación dibujamos las gráficas de las funciones $z(D)$ y $D(z)$.

$z(D)$ Desplazamiento al rojo en función de la distancia

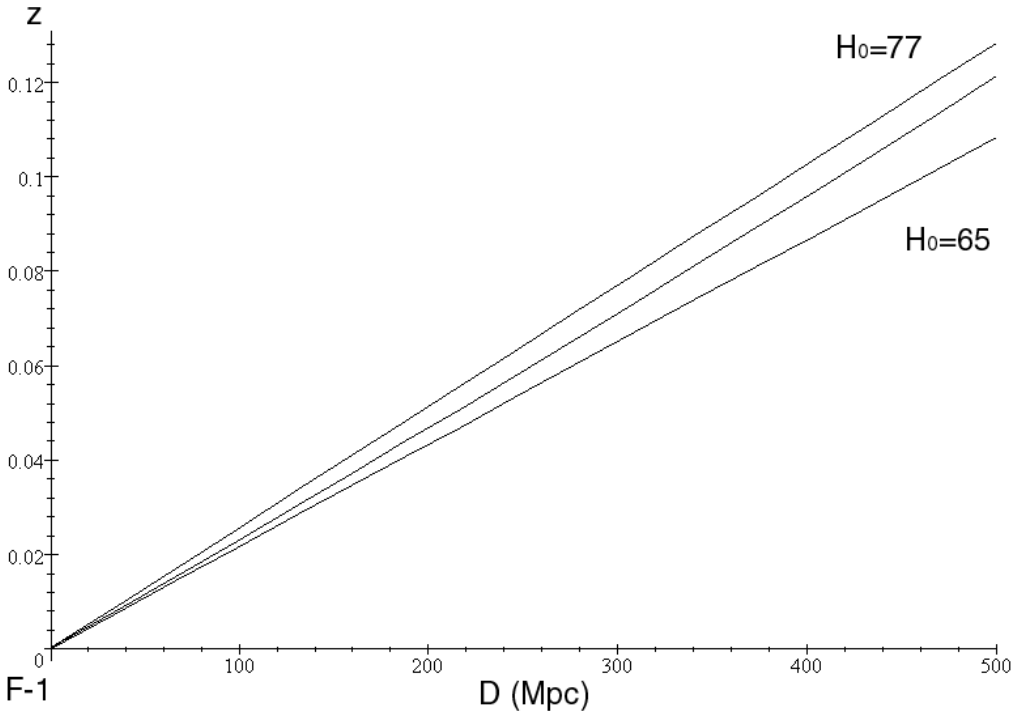
La deducimos de la ecuación (2.6), sustituyendo g por el valor de $\hat{G}$

$$z(D) = e^{\frac{\hat{G}}{c^2} D \times 3{,}08568 \times 10^{24}} - 1$$

que numéricamente es la siguiente

$$z \simeq e^{D \times 2{,}2907 \times 10^{-4}} - 1$$

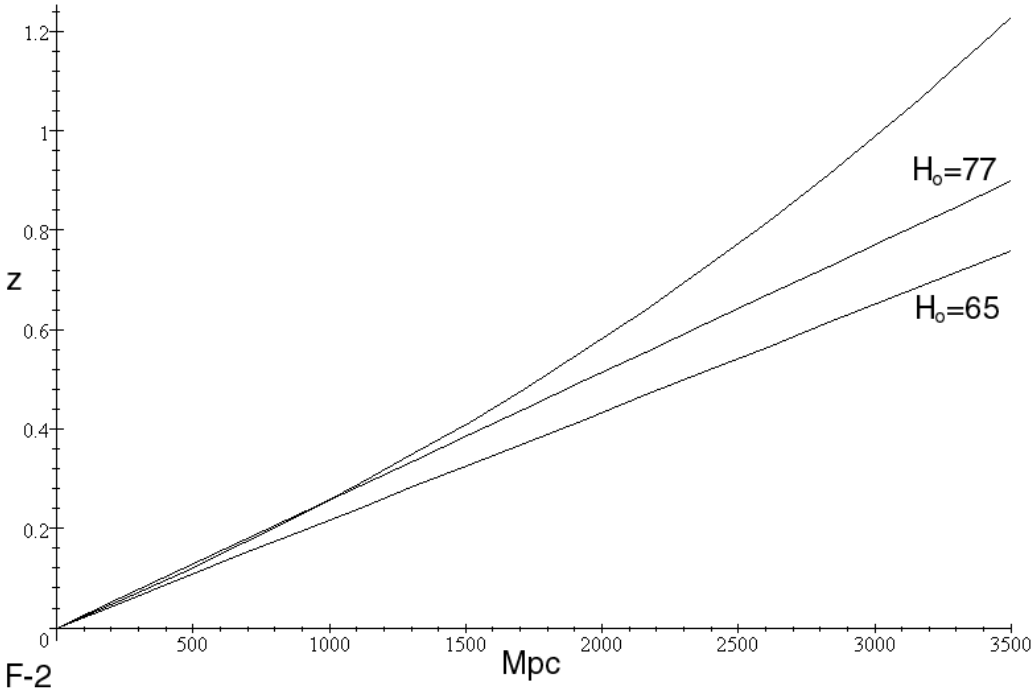
cuyo gráfico es la línea central de la figura F-1.



F-1

Se han dibujado también, las gráficas correspondientes a las funciones que calculan el desplazamiento al rojo en función de la distancia según la Ley de Hubble $z = \frac{H_0}{c} D$, tomando para H_0 los valores 77 y 65. Vemos que la curva definida por la ecuación (2.6) encaja entre las dos rectas de Hubble.

En la figura F-2



F-2

hemos representado la misma función para distancias de hasta $3500 Mpc$, donde se aprecia claramente su caracter exponencial. Se han dibujado también las dos rectas de Hubble.

$D(z)$ Distancia en función del desplazamiento al rojo

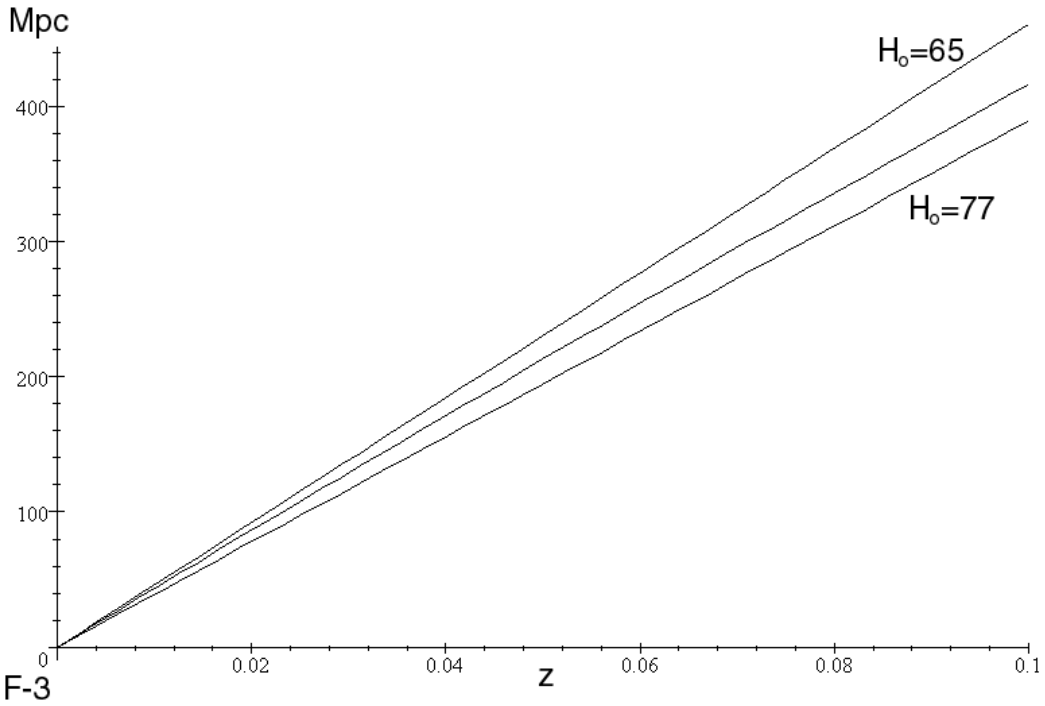
La deducimos de la ecuación (2.7), sustituyendo g por el valor de $\hat{G}$

$$D = \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \frac{c^2}{\hat{G}} \ln(1+z)$$

que numéricamente es la siguiente

$$D \simeq 4{,}3655 \times 10^3 \times \ln(1+z) \tag{2.10}$$

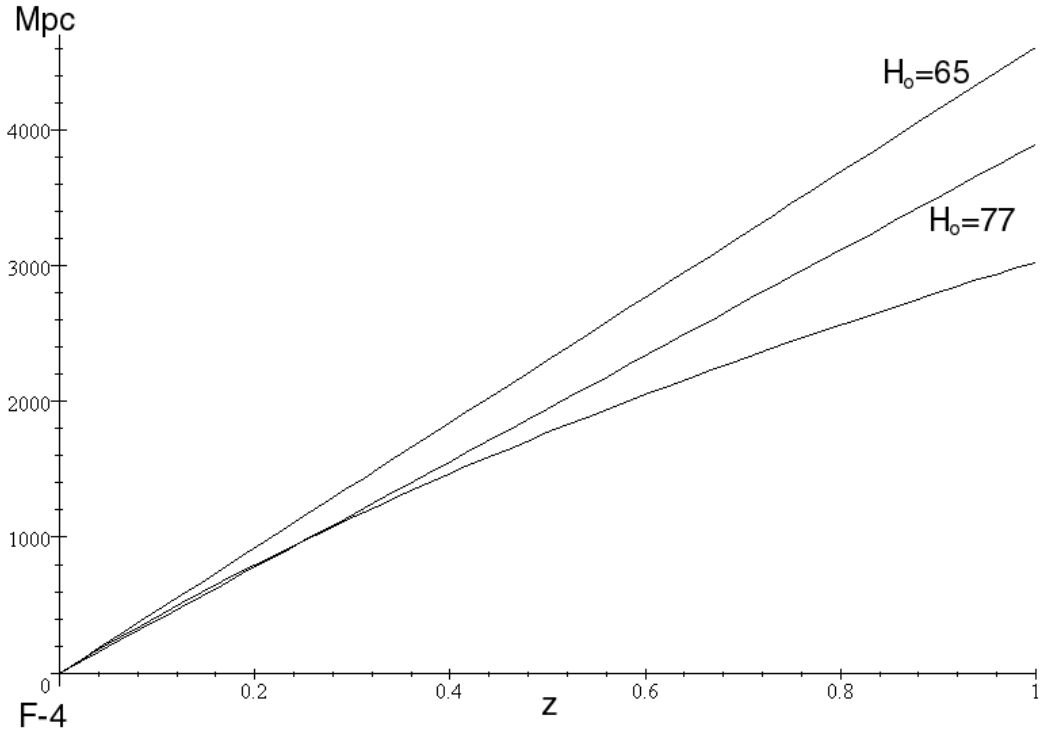
cuya gráfica es la figura F-3



F-3

Vemos que entre $z = 0$ y $z = 0{,}1$ es practicamente una recta que encaja entre las dos rectas definidas por las ecuaciónes de Hubble correspondientes a $H_0 = 77$ y $H_0 = 65$.

En la figura F-4



tenemos esta misma ecuación para valores de hasta $z = 1$, donde ya se aprecia claramente su caracter logarítmico y como se aleja de las rectas de Hubble.

3. Velocidad de la luz creciente y frecuencia constante

Analizamos aquí qué ha de suceder para que se produzca un desplazamiento al rojo de la longitud de onda, suponiendo que el Universo es estático y que la frecuencia de la luz se mantiene constante.

Supongamos una fuente de luz alejada de un observador y ambos en reposo uno respecto al otro. Sea c_0 la velocidad de la luz emitida por la fuente. Sea c la velocidad de la luz cuando llega al observador. Sea ν la frecuencia medida tanto por la fuente como por el observador, pues es constante, y sea z el desplazamiento al rojo medido por el observador. Según vimos en la sección 1, si la frecuencia es constante, para que se produzca un desplazamiento al rojo z, se tiene que cumplir que $c = c_0(1+z)$, es decir la velocidad aumenta, y esto significa una aceleración de su movimiento positiva, que llamaremos a (positiva porque es en el mismo

sentido de su movimiento). Vamos a ver la relación que existe entre a, y la aceleración gravitatoria que sufre la luz por el empuje gravitatorio, que llamaremos $-g$. Utilizaremos el resultado relativista para la cantidad de movimiento, p, para los fotones

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

siendo h la constante de Planck y ν la frecuencia. Y la expresión también relativista de la masa, m, con la que parece comportarse el fotón

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

La aceleración, $-g$, que actúa sobre el fotón produce una fuerza sobre él

$$F = m(-g) = -\frac{h\nu}{c^2}g$$

por otra parte, por la definición de fuerza como derivada de la cantidad de movimiento respecto del tiempo, y teniendo en cuenta que la frecuencia es constante tenemos

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\left(\frac{h\nu}{c}\right)}{dt} = h\nu\frac{d\left(\frac{1}{c}\right)}{dt} = -h\nu\frac{1}{c^2}\frac{dc}{dt} = -\frac{h\nu}{c^2}a$$

ya que $\dfrac{dc}{dt}$ es la aceleración del movimiento de la luz, a. Igualamos ahora estas dos expresiones para la fuerza y obtenemos

$$-\frac{h\nu}{c^2}g = -\frac{h\nu}{c^2}a$$

Luego ha de cumplirse forzosamente que

$$a = g$$

es decir la aceleración $-g$ que sufre la luz por el empuje gravitatorio, se traduce en una aceleración de su movimiento, en el mismo sentido de su movimiento. Aunque parezca paradójico, no la frena, sino que aumenta su velocidad.

Hay unas cuestiones que conviene aclarar en este modelo de velocidad creciente y frecuencia constante. Normalmente se da la siguiente expresión para la energía de un fotón

$$E = h\nu$$

sin embargo, si la utilizamos en este modelo, al ser la frecuencia constante obtendremos que la energía también será constante, y esto no es cierto en absoluto. La verdadera ecuación para la energía del fotón es

$$E = \frac{hc_0}{\lambda}$$

siendo c_0 la constante utilizada normalmente como la velocidad de la luz. Esta expresión es válida en los dos modelos. En el modelo donde la velocidad de la luz es constante, se cumple $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$ y por ello se utiliza la expresión $E = h\nu$.

En este modelo de frecuencia constante hemos de no confundir la expresión válida

$$E = \frac{hc_0}{\lambda}$$

con la siguiente

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

siendo c la velocidad de la luz en un momento dado, ya que $\frac{c}{\lambda} = \nu$, que en este modelo es constante y obtendríamos el mismo resultado, que la energía es constante.

Igualmente la famosa fórmula $E = mc^2$ necesita aclaraciones en este modelo. En su forma original esta ecuación se deduce de la siguiente ecuación relativista

$$E^2 - p^2c_0^2 = M^2c_0^4$$

siendo M la masa en reposo de la partícula considerada, que en el caso de los fotones es $M = 0$, y la ecuación queda $E = pc_0$. Esta última ecuación unida con la definición de la cantidad de movimiento $p = mc$, nos lleva a la ecuación

$$E = mcc_0$$

que es la verdadera ecuación para la energía en los dos modelos. Como en el modelo de velocidad de la luz constante, siempre tenemos que $c = c_0$, se utiliza normalmente $E = mc^2$.

Igualando las dos ecuaciones para la energía $E = \frac{hc_0}{\lambda}$ y $E = mcc_0$ hallamos la ecuación para la masa

$$m = \frac{h}{\lambda c}$$

y sustituyendo λ por $\frac{c}{\nu}$ obtenemos otra expresión para la masa

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

que es la que hemos utilizado al comienzo de esta sección, y que también es válida en el modelo de velocidad de la luz constante. Para la cantidad de movimiento, hemos sustituído en $p = mc$ la expresión que acabamos de calcular para la masa

$$p = mc = \frac{h\nu}{c^2}c = \frac{h\nu}{c}$$

que también es válida para el modelo de velocidad de la luz constante. Y con esto damos por terminadas estas aclaraciones y continuamos con el análisis del modelo que nos ocupa.

Esta aceleración del movimiento de la luz, a, puede ser constante o variable. Si es variable puede ser creciente o decreciente (dejamos fuera del análisis las posibilidades donde en diferentes intervalos, la aceleración tenga diferente comportamiento, ya que en esencia vamos buscando algo "simple", al menos para empezar). Existen infinidad de funciones crecientes, y lo mismo sucede con las decrecientes, por ello se hace necesario encontrar algún criterio de selección de candidatas. Nos fijamos entoces en lo que se dijo al comienzo de este escrito, que la aceleración gravitatoria, $-g$, que sufre la luz, sería de alguna forma proporcional a la velocidad de la luz, pues estaría causada precisamente por su movimiento con respecto al empuje gravitacional. O sea, que si la luz aumentase su celeridad, aumentaría el empuje en contra de su movimiento, y según acabamos de ver aumentaría la aceleración de su movimiento. Por tanto un aumento en la velocidad de la luz produce un aumento de la aceleración de su movimiento. La relación más sencilla es la directamente proporcional, y ahí tenemos nuestra candidata: la aceleración del movimiento es directamente proporcional a la velocidad. También analizaremos la posibilidad de que la aceleración del movimiento sea constante, y la posibilidad de que la aceleración del movimiento sea inversamente proporcional a la velocidad, que aunque desde el punto de vista del empuje gravitacional no tienen mucho sentido, sin embargo son sencillas de analizar, cubren al abanico de las tres posibilidades básicas (creciente, constante, decreciente) , y además nunca se sabe ...

Para cada uno de esos tres modelos, analizaremos la relación entre el desplazamiento al rojo, z, y la distancia a la que fué emitida la luz, D, es decir buscamos expresar la distancia D en función del desplazamiento al rojo z.

4. Velocidad de la luz creciente, con frecuencia constante, y con aceleración del movimiento directamente proporcional a la velocidad

Que la aceleración del movimiento sea directamente proporcional a la velocidad, se expresa como $a(t) = Kc(t)$, siendo K la constante de proporcionalidad, y $a(t)$ y $c(t)$ la aceleración y la velocidad en el momento t respectivamente. Por la definición de aceleración como la derivada de la velocidad respecto del tiempo tenemos

$$\frac{dc(t)}{dt} = a(t) = Kc(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{dc(t)}{c(t)} = Kdt$$

para resolver esta ecuación diferencial integramos ambos miembros y unimos las constantes de integración en una sola,

$$\int \frac{dc(t)}{c(t)} = \int Kdt \qquad \rightarrow \qquad \ln c(t) + A_1 = Kt + A_2 \qquad \rightarrow \qquad \ln c(t) = Kt + A$$

ahora tomamos exponenciales

$$c(t) = e^A e^{Kt}$$

como sabemos que para $t = 0$ la velocidad de la luz es la velocidad con que se emite en la fuente, c_0, tenemos

$$c_0 = e^A e^{K0} = e^A$$

y sustituyendo obtenemos

$$c(t) = c_0 e^{Kt}$$

Por otra parte en la sección 1 vimos que $c(t) = c_0(1 + z(t))$. Igualando esta ecuación con la anterior obtenemos

$$c_0(1 + z(t)) = c_0 e^{Kt}$$

de la cual deducimos

$$z(t) = e^{Kt} - 1 \tag{4.1}$$

Calculamos ahora la distancia recorrida por la luz desde que fué emitida, que denotaremos por $x(t)$. Para ello tenemos en cuenta que la distancia es la integral de la velocidad

$$x(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau = \int_0^t c_0 e^{K\tau} d\tau = c_0 \int_0^t e^{K\tau} d\tau$$

para resolver esta integral hacemos el cambio

$$K\tau = u \qquad \rightarrow \qquad Kd\tau = du \qquad \rightarrow \qquad d\tau = \frac{du}{K}$$

y los limites de integración cambian de la siguiente manera: cuando $\tau = 0$ entonces $u = 0$, y cuando $\tau = t$ entonces $u = Kt$, y la integral queda

$$x(t) = c_0 \int_0^{Kt} e^u \frac{du}{K} = \frac{c_0}{K} \left[e^u\right]_0^{Kt} = \frac{c_0}{K} \left(e^{Kt} - e^0\right) = \frac{c_0}{K} \left(e^{Kt} - 1\right)$$

es decir

$$x(t) = \frac{c_0}{K} \left(e^{Kt} - 1\right)$$

Si tenemos en cuenta la ecuación (4.1), $e^{Kt} - 1 = z(t)$ tenemos que

$$x(t) = \frac{c_0}{K} z(t)$$

y si consideramos la distancia recorrida como función de z, queda así

$$x(z) = \frac{c_0}{K} z \tag{4.2}$$

Para determinar el valor de K nos basamos en las estimaciones hechas para la constante de Hubble, H_0, que se expresa en $\frac{Km/s}{Mpc}$, y viene dada por la expresión

$$z = \frac{H_0}{c_0} D$$

siendo D la distancia expresada en Mpc, y c_0 la constante universal utilizada para la velocidad de la luz expresada en km/s. Si en la ecuación (4.2) consideramos que la distancia x viene expresada en Mpc, y la denotamos por D, y que la constante universal para la velocidad de la luz, c_0, viene expresada en Km/s, entonces K vendrá expresada en $\frac{Km/s}{Mpc}$ y la ecuación (4.2) queda

$$D = \frac{c_0}{K} z$$

que es equivalente a

$$z = \frac{K}{c_0} D$$

y si comparamos esta ecuación con la que define la constante de Hubble obtenemos

$$K = H_0$$

Si trasladamos este resultado a la ecuación dada al comienzo de esta sección y que define este modelo, $a(t) = Kc(t)$, tenemos para la ecuación que define la aceleración con restecto al tiempo

$$a(t) = H_0 c(t) \tag{4.3}$$

donde la velocidad $c(t)$ vendrá expresada en $^{km}/_{s}$, y la aceleración vendrá expresada en $\frac{\left(^{Km}/_{s}\right)^2}{Mpc}$, sistema de unidades un tanto extraño para nosotros. Para expresar la aceleración en $^{cm}/_{s^2}$, consideramos la ecuación (4.3), $a(t) = H_0 c(t)$, con $c(t)$ expresada en $^{cm}/_{s}$ y H_0 expresada en unidades del sistema C.G.S. , que tiene dimensiones de $^{1}/_{s}$, y que denotaremos por $H_0\left(^{1}/_{s}\right)$ para diferenciarla de la expresada usualmente en $\frac{^{Km}/_{s}}{Mpc}$, que denotaremos por $H_0\left(\frac{^{Km}/_{s}}{Mpc}\right)$. Para ver la relación entre $H_0\left(^{1}/_{s}\right)$ y $H_0\left(\frac{^{Km}/_{s}}{Mpc}\right)$ tomamos la equivalencia $1\,Mpc = 3{,}08568 \times 10^{24}\,cm$ y $1\,Km = 10^5\,cm$, y tenemos

$$H_0\left(^{1}/_{s}\right) = H_0\left(\frac{^{Km}/_{s}}{Mpc}\right)\frac{10^5}{3{,}08568 \times 10^{24}} \tag{4.4}$$

con esto la ecuación (4.3) queda

$$a(t) = H_0\left(^{1}/_{s}\right)c(t) \tag{4.5}$$

o también

$$a(t) = H_0\left(\frac{^{Km}/_{s}}{Mpc}\right)\frac{10^5}{3{,}08568 \times 10^{24}}c(t) \tag{4.6}$$

y en ambos casos la aceleración vendrá expresada en $^{cm}/_{s^2}$ al igual que $c(t)$.

Vamos ahora a calcular el valor inicial de la aceleración del movimiento de la luz, o sea $a(0)$, para lo cual en la ecuación (4.6) tomamos $c(0) = c_0 = 2{,}99792 \times 10^{10}\,^{cm}/_{s}$ y para H_0 tomamos las estimaciones hechas por Hubble Space Telescope Key Proyect, donde se determina el valor $H_0 = 71 \pm 6\,\frac{^{Km}/_{s}}{Mpc}$ para desplazamientos al rojo $z \leq 0{,}1$, con lo que tenemos

$$a(0) = (71 \pm 6)\frac{10^5}{3{,}08568 \times 10^{24}}2{,}99792 \times 10^{10} = (6{,}898 \pm 0{,}583) \times 10^{-8}\,^{cm}/_{s^2}$$

Vemos que sorprendentemente es un valor muy similar al valor numérico de la constante de gravitación universal $G = 6{,}672 \times 10^{-8}\, dinas\, {}^{cm^2}\!/_{g^2}$. Luego, la luz que acaba de emitirse, se mueve con una aceleración cuyo valor es similar al valor numérico de G. Denotaremos como $\hat{G}$, para diferenciarla de G, a la aceleración cuyo valor numérico es el mismo que el de G, ya que aunque tengan el mismo valor numérico, tienen diferente ecuación de dimensiones. En la sección 3 vimos que la aceleración del movimiento de la luz, a, tiene el mismo valor y signo contrario que la aceleración gravitatoria que sufre la luz al moverse, $-g$, es decir $a = g$, y esto nos lleva a que la luz que acaba de emitirse, se ve sometida a una aceleración gravitatoria contraria a su movimiento, cuyo valor es muy similar al de $\hat{G}$, incluso podría ser el mismo valor.

La curiosidad nos incita a preguntarnos, para qué valor de H_0 la aceleración inicial tendrá por valor exactamente $\hat{G}$. Según la ecuación (4.5)

$$\hat{G} = H_0\,({}^1\!/_s)\, c_0$$

es decir

$$H_0\,({}^1\!/_s) = \frac{\hat{G}}{c_0} \tag{4.7}$$

que junto con la ecuación (4.4) nos da

$$H_0 \left(\frac{{}^{Km}\!/_s}{Mpc} \right) \frac{10^5}{3{,}08568 \times 10^{24}} = \frac{\hat{G}}{c_0}$$

y despejando

$$H_0 \left(\frac{{}^{Km}\!/_s}{Mpc} \right) = \frac{\hat{G}}{c_0} \frac{3{,}08568 \times 10^{24}}{10^5} \simeq 68{,}673 \, \frac{{}^{Km}\!/_s}{Mpc}$$

Es decir, que si tomamos para la constante de Hubble el valor $H_0 = 68{,}673$, entonces para la luz que acaba de emitirse, la aceleración gravitatoria que sufre en contra de su movimiento será $\hat{G} = 6{,}672 \times 10^{-8}\, {}^{cm}\!/_{s^2}$, y será además el mismo valor que tendrá la aceleración de su movimiento.

Para representar gráficamente este modelo hemos de tomar un valor para H_0. Pudiendo tomar cualquier valor dentro del rango estimado, 71 ± 6, nos dejamos llevar por la intuición, y porque queda muy bonito, y tomamos el valor de $H_0 = 68{,}673$, para el cual la aceleración inicial de la luz es $\hat{G}$. Con esta suposición recalculamos las ecuaciones de este modelo.

Si comparamos la ecuación (4.5)

$$a = H_0\,(1/s)\,c$$

con la ecuación que define este modelo dada al comienzo de esta sección

$$a = Kc$$

observamos que, si trabajamos en el sistema de unidades C.G.S. , entonces

$$K = H_0\,(1/s)$$

Ahora bien, por la ecuación (4.7)

$$H_0\,(1/s) = \frac{\hat{G}}{c_0}$$

con lo cual

$$K = \frac{\hat{G}}{c_0}$$

y solo tenemos que sustituir en las ecuaciones, K por este valor.

Así la distancia en función de z la obtenemos de la ecuación (4.2)

$$x = \frac{c_0}{K}z$$

quedando

$$x = \frac{c_0}{\frac{\hat{G}}{c_0}}z = \frac{c_0^2}{\hat{G}}z \tag{4.8}$$

Con esta ecuación podemos dibujar el diagrama de Hubble, para ello expresamos la distancia en Mpc, que llamaremos D

$$D = \frac{c_0^2}{\hat{G}}z\frac{1}{3{,}08568\times 10^{24}} = \frac{(2{,}99792\times 10^{10})^2}{6{,}672\times 10^{-8}}\frac{1}{3{,}08568\times 10^{24}}z \backsimeq 4365{,}5z$$

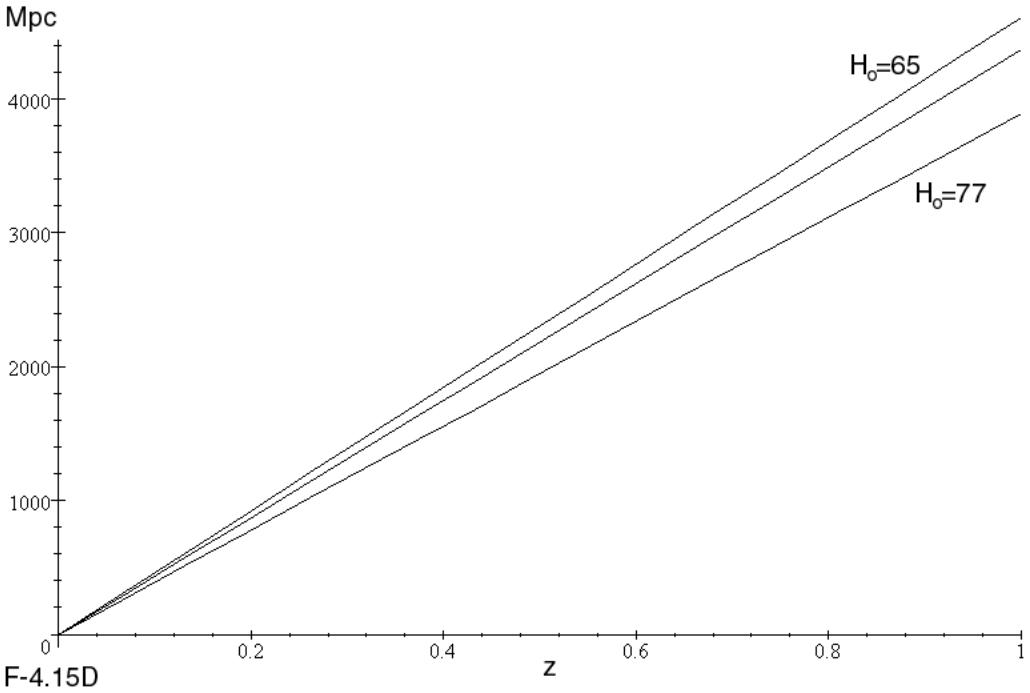
es decir

$$D = 4365{,}5\,z\,Mpc \tag{4.9}$$

También podemos expresar esta ecuación en función de la constante de Hubble

$$D = \frac{c_0}{H_0}z$$

con c_0 expresado en km/s y $H_0 = 68{,}673$, obteniendo por supuesto el mismo resultado. Representamos el diagrama de Hubble en la figura (F-4.15D)



Vemos que este diagrama es idéntico al obtenido con el modelo del Big-Bang tomando como constante de Hubble $H_0 = 68{,}673$.

5. Velocidad de la luz creciente, con frecuencia constante, y con aceleración del movimiento constante

Si suponemos que la aceleración, a, del movimiento de la luz es constante, estamos ante un sencillo movimiento uniformemente acelerado, con velocidad inicial c_0. Queremos encontrar la relación entre desplazamiento al rojo y distancia para compararla con los datos experimentales y así estimar el valor de a. La velocidad de la luz en el momento t será $c(t) = c_0 + at$. La distancia recorrida por la luz en función del tiempo, $x(t)$, será la integral de la velocidad

$$x(t) = \int_0^t c(\tau)d\tau = \int_0^t (c_0 + a\tau)d\tau = c_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Como vimos en la sección 1, la velocidad es también $c(t) = c_0(1+z)$, igualando esta ecuación con $c(t) = c_0 + at$, obtenemos

$$c_0(1+z) = c_0 + c_0 z = c_0 + at$$

luego

$$c_0 z = at$$

y de aquí despejamos el tiempo en función de z,

$$t = \frac{c_0}{a} z$$

ahora sustituimos este valor en la ecuación de la distancia y nos queda

$$x = c_0 \frac{c_0}{a} z + \frac{1}{2} a \left(\frac{c_0}{a} z \right)^2 = \frac{c_0^2}{a} z + \frac{1}{2} \frac{c_0^2}{a} z^2$$

que también puede escribirse como

$$x = \frac{c_0^2}{a} \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right) \tag{5.1}$$

Vamos a estimar el valor de a sirviéndonos de las estimaciones hechas para la constante de Hubble para $z \leq 0{,}1$. En la ecuación (5.1) podemos considerar que la distancia está expresada en Mpc, y la denotamos por la letra D, que c_0 está expresada en Km/s, entonces a quedará en $\frac{(Km/s)^2}{Mpc}$ y la ecuación queda como

$$D = \frac{c_0^2}{a} \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right)$$

de esta ecuación despejamos a

$$a = \frac{c_0^2}{D} \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right)$$

tomando la relación que define la constante de Hubble, $D = \frac{c_0}{H_0} z$, la sustituimos en la ecuación anterior y nos queda

$$a = \frac{c_0^2}{\frac{c_0}{H_0} z} \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right)$$

y si $z \neq 0$ entonces

$$a = c_0 H_0 \left(1 + \frac{1}{2} z \right)$$

y tenemos a como función de H_0 y de z. Tomamos del Hubble Space Telescope Key Proyect el valor $H_0 = 71 \pm 6$ para valores de $z \leq 0{,}1$, así el valor máximo de a se alcanzará cuando H_0 y z tomen los valores máximos, o sea $H_0 = 77$ y $z = 0{,}1$, y a tendrá el valor mínimo cuando H_0 y z tomen los valores mínimos, o sea $H_0 = 65$ y para z tomamos un valor lo suficientemente bajo sin ser 0, por ejemplo $z = 0{,}001$. Calculamos los valores máximo y mínimo de a con estos datos, y al mismo tiempo expresamos a en cm/s^2, para lo cual tomamos la equivalencia $1\,Mpc = 3{,}08568 \times 10^{24}\,cm$ y $1\,Km = 10^5 cm$

$$a(max) = 299792 \times 77 \times 1{,}05 \times \frac{\left(10^5\right)^2}{3{,}08568 \times 10^{24}} \backsimeq 7{,}85 \times 10^{-8} cm/s^2$$

$$a(min) = 299792 \times 65 \times 1{,}0005 \times \frac{\left(10^5\right)^2}{3{,}08568 \times 10^{24}} \backsimeq 6{,}32 \times 10^{-8} cm/s^2$$

Vemos que sorprendentemente son valores muy similares al valor numérico de la constante de gravitación universal $G = 6{,}672 \times 10^{-8}$.

Para representar el diagrama de Hubble de este modelo, necesitamos tomar un valor para la aceleración del movimiento de la luz. Tomamos

$$a = \hat{G} = 6{,}672 \times 10^{-8} cm/s^2$$

y la ecuación (5.1) queda así

$$x = \frac{c_0^2}{\hat{G}} \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right) \tag{5.2}$$

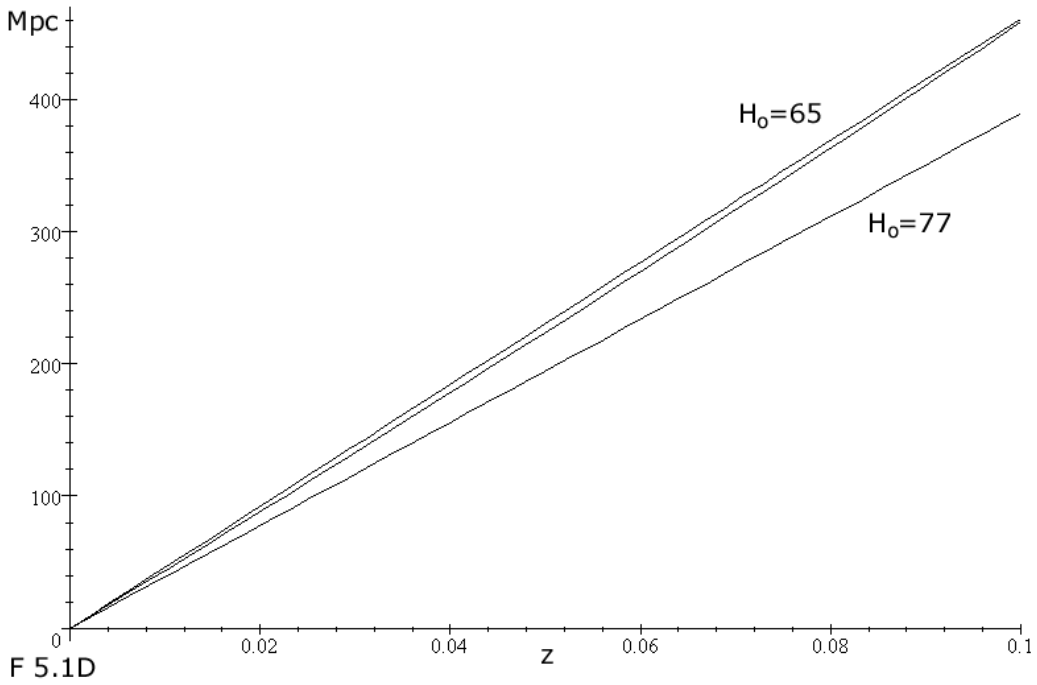
que si la queremos expresar en Mpc quedará

$$D = \frac{\left(2{,}99792 \times 10^{10}\right)^2}{6{,}672 \times 10^{-8}} \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right) \simeq 4365{,}5 \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right)$$

es decir

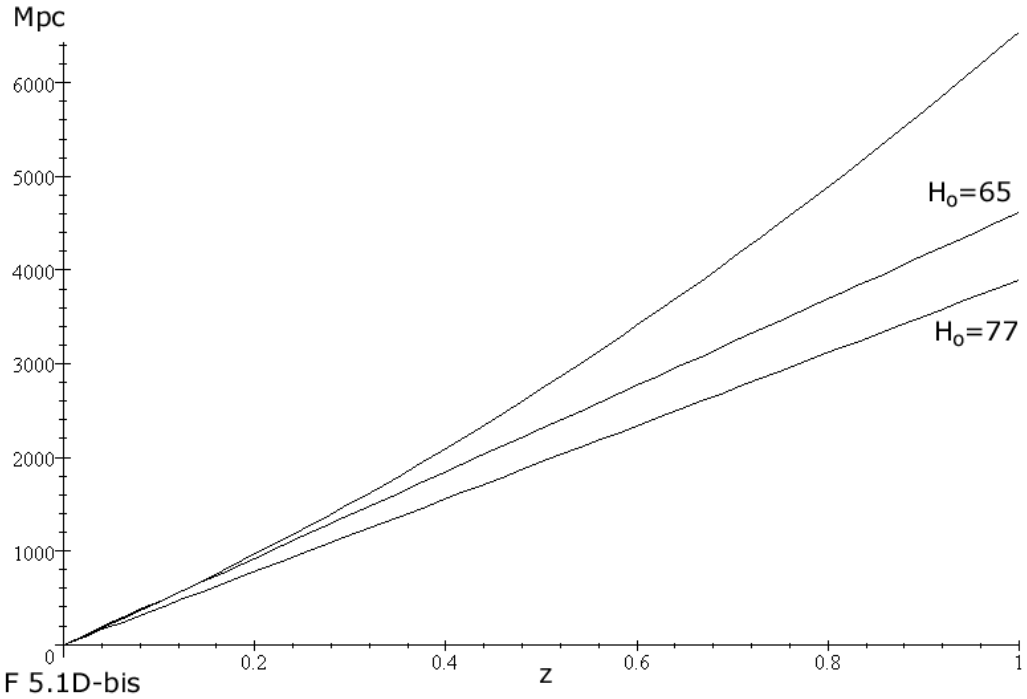
$$D = 4365{,}5 \left(z + \frac{1}{2} z^2 \right) Mpc \tag{5.3}$$

y la representamos gráficamente en la figura (F 5.1D) con $0 \leq z \leq 0{,}1$, donde también se han representado las dos rectas de Hubble, una con $H_0 = 77$ y la otra con $H_0 = 65$. Vemos que la gráfica de este modelo encaja entre ellas.



F 5.1D

En la figura (F 5.1D-bis) la representamos con $0 \leq z \leq 1$, donde observamos la gran divergencia entre este modelo y las rectas de Hubble.



F 5.1D-bis

6. Velocidad de la luz creciente, con frecuencia constante, y con aceleración del movimiento inversamente proporcional a la velocidad

Que la aceleración del movimiento sea inversamente proporcional a la velocidad, se expresa como $a(t) = \dfrac{K}{c(t)}$, siendo K la constante de proporcionalidad, y $a(t)$ y $c(t)$ la aceleración y la velocidad en el momento t respectivamente. Por la definición de aceleración como la derivada de la velocidad respecto del tiempo tenemos

$$\frac{dc(t)}{dt} = a(t) = \frac{K}{c(t)} \qquad \rightarrow \qquad c(t)dc(t) = Kdt$$

para resolver esta ecuación diferencial integramos ambos miembros

$$\int c(t)dc(t) = \int Kdt \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}c^2(t) + A_1 = Kt + A_2$$

siendo A_1 y A_2 constantes de integración que uniéndolas en una sola, A, nos queda

$$c^2(t) = 2(Kt + A)$$

Para determinar el valor de A, tenemos en cuenta que para $t = 0$ la velocidad de la luz es la velocidad con que se emite en la fuente, c_0, y nos queda

$$c_0^2 = 2(K0 + A) = 2A$$

luego

$$A = \frac{c_0^2}{2}$$

y la ecuación queda

$$c^2(t) = 2\left(Kt + \frac{c_0^2}{2}\right) = 2Kt + c_0^2 \tag{6.1}$$

Por otra parte, como se vió en la sección 1, sabemos que $c = c_0(1+z)$, y por tanto $c^2 = c_0^2(1+z)^2$, e igualando esta ecuación con la anterior obtenemos

$$c_0^2(1+z)^2 = 2Kt + c_0^2 \tag{6.2}$$

Calculamos ahora la distancia recorrida por la luz desde que fué emitida por la fuente, que denotaremos por $x(t)$. Para ello tenemos en cuenta que la distancia es la integral de la velocidad, y sustituímos $c(t)$ por el valor obtenido en la ecuación (6.1)

$$x(t) = \int_0^t c(\tau)d\tau = \int_0^t \sqrt{2K\tau + c_0^2}d\tau$$

Para resolver esta ecuación hacemos el cambio

$$2K\tau + c_0^2 = u \qquad \rightarrow \qquad 2Kd\tau = du \qquad \rightarrow \qquad d\tau = \frac{du}{2K}$$

y los limites de integración cambian de la siguiente manera:

cuando $\tau = 0$ entonces $u = c_0^2$, y cuando $\tau = t$ entonces $u = 2Kt + c_0^2$, y la integral queda

$$x(t) = \int_{c_0^2}^{2Kt+c_0^2} \sqrt{u}\frac{du}{2K} = \frac{1}{2K}\left[\frac{1}{3/2}u^{3/2}\right]_{c_0^2}^{2Kt+c_0^2} = \frac{1}{3K}\left[\left(2Kt + c_0^2\right)^{3/2} - \left(c_0^2\right)^{3/2}\right]$$

Si ahora tenemos en cuenta la ecuación (6.2) podemos tener x en función de z de la siguiente manera

$$x = \frac{1}{3K}\left[[c_0(1+z)]^3 - c_0^3\right] = \frac{c_0^3}{3K}\left[(1+z)^3 - 1\right]$$

que también podemos escribir como

$$x = \frac{c_0^3}{K}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3\right) \tag{6.3}$$

Para determinar el valor de K nos basamos en las estimaciones hechas para la constante de Hubble H_0 para $z \leq 0{,}1$. En la ecuación (6.3) podemos considerar que la distancia está expresada en Mpc, y la denotamos por la letra D, que c_0 está expresada en $^{Km}/_{s}$, y K vendrá expresada en $\frac{\left(^{Km}/_{s}\right)^3}{Mpc}$. Si despejamos K de la ecuación (6.3), nos queda en función de z y D

$$K = \frac{c_0^3}{D}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3\right)$$

Tomamos la relación que define la constante de Hubble, $D = \frac{c_0}{H_0}z$, y aplicándola en la ecuación anterior nos queda

$$K = \frac{c_0^3}{\frac{c_0}{H_0}z}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3\right)$$

y si $z \neq 0$ entonces

$$K = c_0^2 H_0\left(1 + z + \frac{1}{3}z^2\right)\frac{\left(^{Km}/_{s}\right)^3}{Mpc}$$

Tomamos del Hubble Space Telescope Key Proyect el valor $H_0 = 71 \pm 6$ para valores de $z \leq 0{,}1$, así el valor máximo de K se alcanzará cuando H_0 y z tomen los valores máximos, o sea $H_0 = 77$ y $z = 0{,}1$, y K tendrá el valor mínimo cuando H_0 y z tomen los valores mínimos, o sea $H_0 = 65$, y para z tomamos un valor lo suficientemente bajo sin ser 0, por ejemplo $z = 0{,}001$. Calculamos los valores máximo y mínimo de K con estos datos, y al mismo tiempo expresamos K en el sistema de unidaddes C.G.S., así K quedará expresada en $^{cm^2}/_{s^3}$, para lo cual tomamos la equivalencia $1\,Mpc = 3{,}08568 \times 10^{24}\,cm$, y $1\,Km = 10^5 cm$

$$K(max) = (299792)^2 \times 77 \times 1{,}10333 \times \frac{\left(10^5\right)^3}{3{,}08568 \times 10^{24}}\,^{cm^2}/_{s^3}$$

$$K(min) = (299792)^2 \times 65 \times 1{,}01 \times \frac{\left(10^5\right)^3}{3{,}08568 \times 10^{24}}\,^{cm^2}/_{s^3}$$

Para cada uno de estos valores extremos de K, vamos a calcular el valor inicial de la aceleración del movimiento de la luz. Para ello tomamos la ecuación que define este modelo, $a(t) = \dfrac{K}{c(t)}$, que en el momento $t = 0$ queda como $a(0) = \dfrac{K}{c_0}$, y así tendremos el valor máximo y mínimo para esa aceleración según las estimaciones de la constante de Hubble. Las ecuaciones son las siguientes

$$a(max) = \frac{K(max)}{c_0} =$$

$$= \frac{1}{2{,}99792 \times 10^{10}} \times (299792)^2 \times 77 \times 1{,}10333 \times \frac{\left(10^5\right)^3}{3{,}08568 \times 10^{24}} \backsimeq$$

$$\backsimeq 8{,}25 \times 10^{-8} {}^{cm}/_{s^2}$$

$$a(min) = \frac{K(min)}{c_0} =$$

$$= \frac{1}{2{,}99792 \times 10^{10}} \times (299792)^2 \times 65 \times 1{,}01 \times \frac{\left(10^5\right)^3}{3{,}08568 \times 10^{24}} \backsimeq$$

$$\backsimeq 6{,}38 \times 10^{-8} {}^{cm}/_{s^2}$$

Vemos que sorprendentemente son valores muy similares al valor numérico de la constante de gravitación universal $G = 6{,}672 \times 10^{-8}$.

Para representar el diagrama de Hubble de este modelo según la ecuación (6.3), necesitamos tomar un valor para K . Lo obtenemos de la ecuación

$$a(0) = \frac{K}{c_0}$$

considerando para la aceleración inicial del movimiento de la luz el valor $\hat{G} = 6{,}672 \times 10^{-8} {}^{cm}/_{s^2}$, es decir

$$\hat{G} = \frac{K}{c_0}$$

de forma que

$$K = c_0 \hat{G}$$

y la ecuación (6.3) queda como

$$x = \frac{c_0^3}{c_0 \hat{G}} \left(z + z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) = \frac{c_0^2}{\hat{G}} \left(z + z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) \tag{6.4}$$

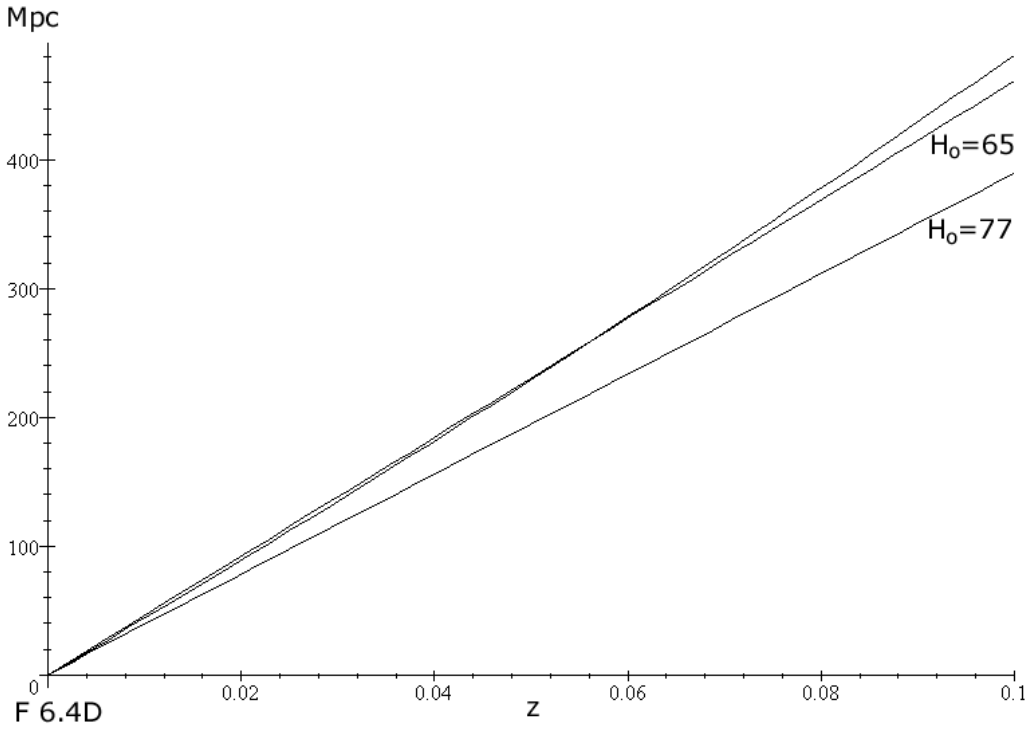
que si la queremos expresar en Mpc quedará así

$$D = \frac{\left(2{,}99792 \times 10^{10}\right)^2}{6{,}672 \times 10^{-8}} \left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3\right) \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}}$$

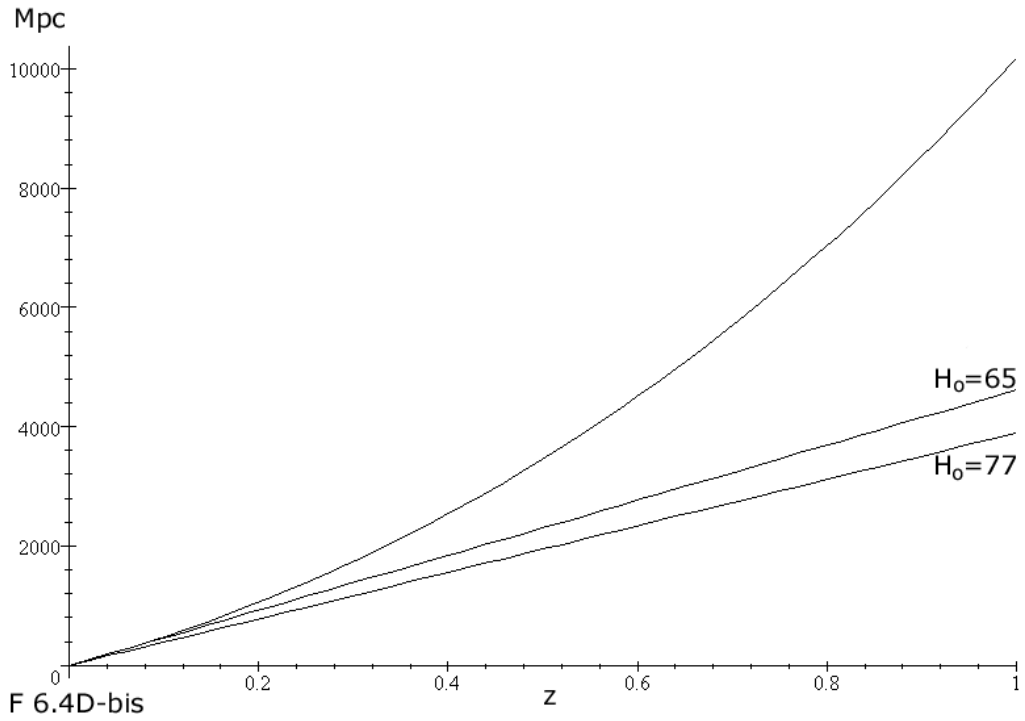
es decir

$$D \simeq 4365{,}5 \left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3\right) Mpc \tag{6.5}$$

y la representamos gráficamente en la figura (F 6.4D) con $0 \leq z \leq 0{,}1$, donde también se han representado las rectas de Hubble con $H_0 = 77$ y con $H_0 = 65$.



En al figura (F 6.4D-bis) la representamos con $0 \leq z \leq 1$ donde se observa la gran divergencia con las rectas de Hubble



7. Comparación de los modelos con los datos observados para $0{,}1 \leq z \leq 1$

En este escrito hemos analizado 4 modelos teóricos que explican la relación entre z y distancia, y hemos visto que los 4 coinciden razonablemente bien con los datos observados para $z \leq 0{,}1$. Sin embargo para $z \geq 0{,}1$ estos modelos difieren considerablemente, por ello es preciso compararlos con los datos observados para $z \geq 0{,}1$, y así comprobar cual de ellos coincide con lo observado, si es que alguno lo hace.

Para desplazamientos al rojo de hasta $z = 1$ tomaremos los datos publicados por SCP (Supernova Cosmology Proyect), que relacionan la magnitud aparente de supernovas tipo Ia, y el desplazamiento al rojo de la propia supernova o de la galaxia donde esta se encuentra.

Los datos obtenidos por SCP referentes a la magnitud aparente de las supernovas, fueron obtenidos teniendo en cuenta ciertas correcciones instrumentales conocidas como K-correction, que aunque necesarias, se formularon siguiendo el modelo cosmológico de Universo en expansión. Nuestros 4 modelos suponen

un Universo estático, por ello se hace preciso reformular las K-correction desde este punto de vista. Veremos que hay una diferencia de $2{,}5\log(1+z)$ entre las K-correction suponiendo el Universo en expansión, y las K-correction suponiendo el universo estático. Por tanto, a los datos publicados por SCP referentes a la magnitud aparente de las supernovas, tendremos que restarle $2{,}5\log(1+z)$, para obtener la magnitud aparente en el modelo de Universo estático.

Con estos datos de magnitud aparente corregidos, podremos estimar la distancia a las supernovas, y así obtener la relación entre z y distancia para valores de z de hasta $z=1$. Solo quedará comparar estos datos con lo que predice cada uno de los 4 modelos teóricos.

Vemos todo esto a continuación.

8. Luninosidad, brillo, magnitud y distancia

Supongamos una estrella a distancia D de nosotros, y ambos en reposo uno respecto al otro. Supongamos también que no existe desplazamiento al rojo de la luz que nos llega procedente de la estrella. Se define la luminosidad F de la estrella, como la energía por segundo radiada por la estrella en todas direcciones. Se define el brillo f de la estrella, como la energía por segundo y por cm^2 que recibimos de ella. Entonces, si nada entorpece el camino entre la estrella y nosotros, tenemos que

$$f = \frac{F}{4\pi D^2}$$

Para medir el brillo se utiliza el sistema de magnitudes, que es un sistema relativo, es decir, definido el brillo $\hat{f}$ al cual se le asigna el valor 0 de la escala de magnitues, $m=0$, se define la magnitud m de otra estrella que presenta un brillo f_m, mediante la ecuación

$$m = -2{,}5\log_{10}\left(\frac{f_m}{\hat{f}}\right)$$

A esta magnitud también se le llama magnitud aparente de la estrella, donde el termino aparente hace referencia a que es la magnitud que nosotros observamos. En lo que sigue, cuando hablemos de magnitud de una estrella, nos estaremos refiriendo a su magnitud aparente.

También se utiliza el concepto de magnitud absoluta de una estrella, y se denota con la letra M, que se define como la magnitud aparente que tendría dicha estrella si estuviese a 10 parsec de distancia de nosotros.

Supongamos ahora que tomamos como supernova de referencia a una supernova concreta, que llamaremos S_0, que dista de nosotros10 parsec de distancia, de

la cual conocemos su luminosidad F_0, su magnitud M, que coincidirá con su magnitud absoluta por estar a 10 parsec, y a través de su magnitud podemos obtener también su brillo f_0. Suponemos también que todas las supernovas similares a S_0 tienen la misma luminosidad F_0. Por último supongamos que S_0 y todas las supernovas similares a ella, están en reposo respecto a nosotros, que nada se interpone a la luz entre ellas y nosotros, y que no existe desplazamiento al rojo para la luz que nos llega de ellas. En estas condiciones ideales podríamos saber a qué distancia se encuentra una supernova genérica similar a S_0, con solo conocer su magnitud:

Sea S la supernova genérica con magnitud m, con brillo f_m, cuya distancia D expresada en Mpc queremos calcular. Si hacemos la diferencia entre las magnitudes de S y S_0 obtenemos

$$m - M = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{f_m}{\hat{f}}\right) - \left(-2{,}5 \log_{10}\left(\frac{f_0}{\hat{f}}\right)\right)$$

y dado que

$$-2{,}5 \log_{10}\left(\frac{f_0}{\hat{f}}\right) = 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{\hat{f}}{f_0}\right)$$

obtenemos

$$m - M = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{f_m}{\hat{f}}\right) - 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{\hat{f}}{f_0}\right)$$

sacamos a $-2{,}5$ como factor comun, y sabiendo que la suma de logaritmos es el logaritmos del producto tenemos

$$m - M = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{f_m}{\hat{f}} \frac{\hat{f}}{f_0}\right)$$

que queda

$$m - M = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{f_m}{f_0}\right) \tag{8.1}$$

La proporción entre los brillos está relacionada con las distancias de la manera siguiente, teniendo en cuenta que $10\,pc = 10^{-5}\,Mpc$

$$\frac{f_m}{f_0} = \frac{\dfrac{F_0}{4\pi D^2}}{\dfrac{F_0}{4\pi \left(10^{-5}\right)^2}} = \frac{\left(10^{-5}\right)^2}{D^2} = \left(\frac{10^{-5}}{D}\right)^2$$

sustituímos en la ecuación (8.1) y tenemos

$$m - M = -2{,}5 \log_{10} \left(\frac{10^{-5}}{D} \right)^2 = -5 \log_{10} \left(\frac{10^{-5}}{D} \right)$$

y dado que

$$-\log_{10} \left(\frac{10^{-5}}{D} \right) = \log_{10} \left(\frac{D}{10^{-5}} \right)$$

tenemos

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D}{10^{-5}} \right)$$

Para hallar la distancia D, la despejamos de la ecuación anterior

$$\frac{m-M}{5} = \log_{10} \left(\frac{D}{10^{-5}} \right)$$

aplicando la definición de $\log_{10}$ nos queda

$$\frac{D}{10^{-5}} = 10^{\frac{m-M}{5}}$$

y tenemos

$$D = 10^{-5} 10^{\frac{m-M}{5}} = 10^{\frac{m-M}{5} - 5}$$

que definitivamente queda

$$D = 10^{\frac{m-M-25}{5}} \tag{8.2}$$

La diferencia de magnitudes $m - M$ se denota por la letra μ, y se denomina módulo de distancia, dado que a través de su valor podemos conocer la distancia, ya que si sustituímos en la ecuación (8.2) tenemos

$$D = 10^{\frac{\mu - 25}{5}} \tag{8.3}$$

Las condiciones ideales que hemos supuesto al obtener la ecuación (8.2) no se dan en la realidad. El valor que obtenemos al medir con nuestros instrumentos la magnitud de una supernova con desplazamiento al rojo z, valor de la magnitud que

denotaremos por m_z, se vé afectado fundamentalmente por 3 factores: la extinción galáctica, el factor de alargamiento y el desplazamiento al rojo. Veamos como afecta cada uno de ellos al valor ideal m que aparece en la ecuación (8.2), que es el valor que tendría la magnitud de no verse afectada por esos factores.

La extinción galactica, A, debida al polvo o gas de nuestra propia galaxia y de la galaxia donde se encuentra la supernova, impiden que parte de la luz emitida por la supernova llegue hasta nosotros. Esta cantidad, estimada para cada supernova en particular, habrá que restarla a la magnitud observada m_z para obtener m, es decir tenemos la ecuación

$$m = m_z - A$$

El factor de alargamiento, $\Delta corr$, se debe a las diferencias que muestran entre sí las supernovas tipo Ia, en la relación anchura-luminosidad de sus curvas temporales de luz. Es una corrección estimada para cada supernova en particular, que se suma a la magnitud observada m_z para obtener m, es decir tenemos la ecuación

$$m = m_z + \Delta corr$$

El desplazamiento al rojo z influye en el valor de la magnitud observada m_z, porque para medir la magnitud se utilizan filtros, y al desplazarse el espectro varía la respuesta en el filtro. Esta variación, que depende de z y del filtro usado, se conoce como K-correction, $K(z)$, y es la diferencia entre la magnitud observada de la supernova con desplazamiento al rojo, m_z, y la magnitud que tendría la supernova si no tuviese desplazamiento al rojo, m, es decir tenemos la ecuación

$$m = m_z - K(z)$$

Si ahora unimos las 3 correcciones anteriores en una sola ecuación obtenemos

$$m = m_z - A + \Delta corr - K(z) \tag{8.4}$$

Volvemos ahora al cálculo en condiciones reales de la distancia D a la supernova genérica S, para la cual hemos medido su magnitud m_z, estimado su extinción galactica A y su factor de alargamiento $\Delta corr$, y medido su desplazamiento al rojo z y con él $K(z)$. Para calcular D, solo tenemos que sustituir el valor de m en la ecuación (8.2), por el que acabamos de obtener en la ecuación (8.4). Los datos publicados por SCP proporcionan el material necesario para obtener este valor, de hecho se da para un número suficiente de supernovas el valor de m, que allí se denomina $m_B^{effective}$, ya corregido por los 3 factores. Pero hay un problema:

Como se dijo en la sección 7, la K-correction utilizada por SCP se basa en el modelo de Universo en expansión o Big-Bang, K-correction que llamaremos

$K^{BB}(z)$, y hay una diferencia de $2{,}5\log_{10}(1+z)$ con la K-correction basada en el modelo de Universo estático, que seguiremos llamando $K(z)$. Es decir

$$K(z) = K^{BB}(z) + 2{,}5\log_{10}(1+z) \tag{8.5}$$

Las correcciones producidas por la extinción galáctica no parecen que sean afectadas por el modelo de Universo, y consideraremos válidas las calculadas por SCP.

Las correcciones producidas por el factor de alargamiento no se han calculado en este escrito, por lo cual no sabemos si pueden ser afectadas por el modelo de Universo. Por ello no introducimos ninguna corrección a las calculadas por SCP, aunque esto tendrá que comprobarse detenidamente en trabajos posteriores.

En definitiva, los datos publicados por SCP de la magnitud corregida de la supernova genérica S, que llamaremos m^{SCP}, tiene por ecuación

$$m^{SCP} = m_z - A + \Delta corr - K^{BB}(z) \tag{8.6}$$

Sutituyendo en la ecuación que nos da el valor de la magnitud corregida en el modelo de Universo estático, ecuación (8.4), el valor de $K(z)$ por el obtenido en la ecuación (8.5) nos queda

$$m = m_z - A + \Delta corr - K^{BB}(z) - 2{,}5\log_{10}(1+z)$$

y si ahora tenemos en cuenta la ecuación (8.6) nos queda

$$m = m^{SCP} - 2{,}5\log_{10}(1+z)$$

Es decir, para obtener la magnitud en el modelo de Universo estático que tendría la supernova si no presentase desplazamiento al rojo, hay que restar $2{,}5\log_{10}(1+z)$ al valor dado por SCP para la magnitud que tendría la supernova si no presentase desplazamiento al rojo. Y con este valor de m ya podemos calcular D según la ecuación (8.2) .

Esto lo haremos en la sección 10, pero antes hay una cosa muy importante que hacer: demostrar la relación entre las K-correction dada por la ecuación (8.5)

$$K(z) = K^{BB}(z) + 2{,}5\log_{10}(1+z)$$

que lo hacemos en la sección siguiente.

9. K-correction en el modelo de Universo estático.

Supongamos una estrella en reposo respecto a nosotros, y para la cual conocemos su función de distribución espectral de energía (SED), que llamaremos $F(\lambda)$, y que expresa los ergios por segundo por centímetro cuadrado y por unidad de longitud de onda que recibimos de la estrella. De forma que, si queremos saber qué cantidad de energía por segundo por centímetro cuadrado recibimos de la estrella en el intervalo de longitudes de onda $[\lambda_0, \lambda_1]$, solo tenemos que integrar $F(\lambda)$ entre esas longitudes de onda,

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} F(\lambda) d\lambda$$

Los instrumentos que miden la magnitud de las estrellas son contadores de fotones, no contadores de energía, por ello definimos la función $N(\lambda)$, como el equivalente al SED de la estrella, pero contando fotones en lugar de ergios, es decir, $N(\lambda)$ mide el número de fotones por segundo por centímetro cuadrado y por unidad de longitud de onda que recibimos de la estrella. Sea $n[\lambda_0, \lambda_1]$ el número de fotones por segundo por centímetro cuadrado que recibimos de la estrella en el intervalo de longitudes de onda $[\lambda_0, \lambda_1]$. Si queremos saber su valor, solo tenemos que integrar $N(\lambda)$ entre esas longitudes de onda, es decir

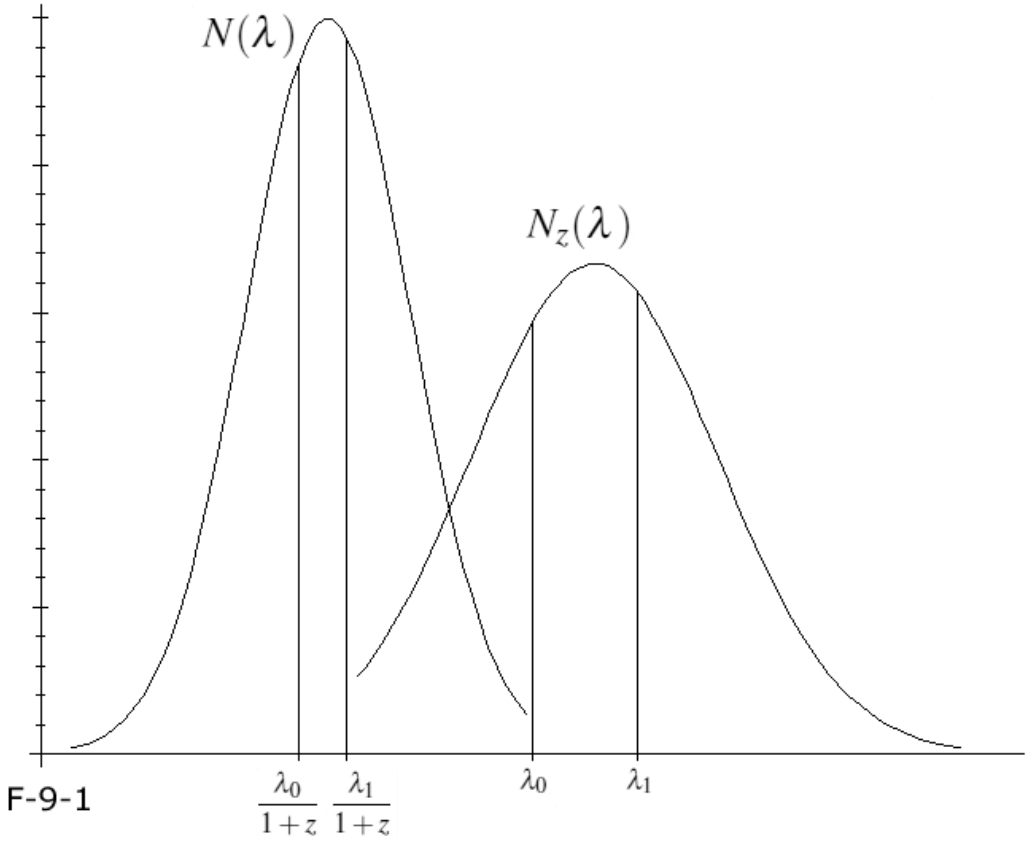
$$n[\lambda_0, \lambda_1] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N(\lambda) d\lambda$$

Supongamos ahora que observamos una segunda estrella idéntica a la primera, y eso quiere decir que para cada longitud de onda emite el mismo número de fotones que la primera estrella. Supongamos también que está a la misma distancia y en reposo respecto a nosotros. Por último supongamos que observamos que la luz de esta segunda estrella presenta un desplazamiento al rojo z. Vamos a calcular cómo se transforma la función $N(\lambda)$ de la segunda estrella, por efecto del desplazamiento al rojo. Llamemos a esta función $N_z(\lambda)$. Para obtener su valor vamos a calcular el número de fotones por segundo y por centímetro cuadrado, con desplazamiento al rojo z, que recibimos en el intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$, cantidad que denotamos por $n_z[\lambda_0, \lambda_1]$, que por definición de $N_z(\lambda)$ será

$$n_z[\lambda_0, \lambda_1] = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N_z(\lambda) d\lambda$$

Si un fotón que recibimos de la segunda estrella, con un desplazamiento al rojo z tiene longitud de onda λ, significa que ese fotón se emitió con longitud de onda

$\frac{\lambda}{1+z}$, por la propia definición de desplazamiento al rojo, es decir, los fotones con un desplazamiento al rojo z que recibimos de la segunda estrella en el intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$, son fotones que se emitieron en el intervalo $\left[\frac{\lambda_0}{1+z}, \frac{\lambda_1}{1+z}\right]$ (ver figura F-9-1).



F-9-1

Ahora bien, dado que las dos estrellas son idénticas en la emisión, el número de fotones emitido por la segunda estrella en el intervalo $\left[\frac{\lambda_0}{1+z}, \frac{\lambda_1}{1+z}\right]$, es el mismo que el emitido por la primera estrella, y dado que ambas estrellas están a la misma distancia y en reposo respecto a nosotros, recibiremos la misma cantidad de fotones de ambas estrellas, ya que la proporción entre el número de fotones emitidos

y el número de fotones recibidos, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Es decir

$$n_z[\lambda_0,\lambda_1] = n\left[\frac{\lambda_0}{1+z},\frac{\lambda_1}{1+z}\right]$$

Pero de los fotones emitidos por la primera estrella sabemos cuantos recibimos, gracias a que conocemos su $N(\lambda)$, y es exactamente

$$n\left[\frac{\lambda_0}{1+z},\frac{\lambda_1}{1+z}\right] = \int_{\frac{\lambda_0}{1+z}}^{\frac{\lambda_1}{1+z}} N(\lambda)d\lambda$$

por tanto tenemos que

$$n_z[\lambda_0,\lambda_1] = n\left[\frac{\lambda_0}{1+z},\frac{\lambda_1}{1+z}\right] \qquad \rightarrow \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N_z(\lambda)d\lambda = \int_{\frac{\lambda_0}{1+z}}^{\frac{\lambda_1}{1+z}} N(\lambda)d\lambda$$

Para la segunda integral hacemos el cambio de variable

$$u = \lambda(1+z) \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{u}{1+z} \qquad \rightarrow \qquad d\lambda = \frac{du}{1+z}$$

los límites de integración cambian de la siguiente manera:

cuando $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{1+z}$ entonces $u = \lambda_1$, y cuando $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{1+z}$ entonces $u = \lambda_0$ y la ecuación queda

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N_z(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N\left(\frac{u}{1+z}\right)\frac{du}{1+z}$$

que también puede escribirse como

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N_z(\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{1}{1+z}N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda \tag{9.1}$$

Ahora bien, como esto sucede para cualquier intervalo $[\lambda_0,\lambda_1]$, entonces por fuerza debe cumplirse que

$$N_z(\lambda) = \frac{1}{1+z}N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) \tag{9.2}$$

como puede demostrarse de la manera siguiente:

Definimos para un valor a fijo, las funciónes

$$A(x) = \int_a^x N_z(\lambda)d\lambda \qquad B(x) = \int_a^x \frac{1}{1+z}N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda$$

Entonces tenemos por la ecuación (9.1) que $A(x) = B(x)$ y por consiguiente

$$\frac{dA(x)}{dx} = \frac{dB(x)}{dx}$$

por otra parte, aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para calcular cada diferencial obtenemos

$$\frac{dA(x)}{dx} = N_z(x) \qquad \frac{dB(x)}{dx} = \frac{1}{1+z} N\left(\frac{x}{1+z}\right)$$

luego

$$N_z(x) = \frac{1}{1+z} N\left(\frac{x}{1+z}\right)$$

que es la ecuación (9.2)

Vamos a calcular ahora la magnitud que medirán nuestros instrumentos para cada una de las dos estrellas.

Podemos definir el cero de la escala de magnitudes en el intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$, si fijamos un número de fotones determinado para el valor $m = 0$, sea $N_0[\lambda_0, \lambda_1]$ ese número de fotones. Sea $m[\lambda_0, \lambda_1]$ la magnitud en el intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$, que mediremos para la primera estrella, la que no presenta desplazamiento al rojo. Sea sea $m_z[\lambda_0, \lambda_1]$ la magnitud en el intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$, que mediremos para la segunda estrella, la que presenta un desplazamiento al rojo z. Entonces, de acuerdo con la definición de magnitud

$$m[\lambda_0, \lambda_1] = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{n[\lambda_0, \lambda_1]}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]}\right)$$

$$m_z[\lambda_0, \lambda_1] = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{n_z[\lambda_0, \lambda_1]}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]}\right)$$

Hallamos ahora la diferencia entre estas magnitudes

$$m_z[\lambda_0, \lambda_1] - m[\lambda_0, \lambda_1] = -2{,}5 \log_{10}\left(\frac{n_z[\lambda_0, \lambda_1]}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]}\right) + 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{n[\lambda_0, \lambda_1]}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]}\right) =$$

$$= 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{n[\lambda_0, \lambda_1]}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]} \frac{N_0[\lambda_0, \lambda_1]}{n_z[\lambda_0, \lambda_1]}\right) = 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{n[\lambda_0, \lambda_1]}{n_z[\lambda_0, \lambda_1]}\right)$$

que expresada en términos de las funciones de densidad del número de fotones queda así

$$m_z[\lambda_0,\lambda_1]-m[\lambda_0,\lambda_1]=2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N_z(\lambda)d\lambda}\right)=$$

y si ahora tenemos en cuenta la ecuación (9.2)

$$=2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{1}{1+z}N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right)=2{,}5\log_{10}\left((1+z)\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right)$$

y nos queda

$$m_z[\lambda_0,\lambda_1]-m[\lambda_0,\lambda_1]=$$

$$=2{,}5\log_{10}(1+z)+2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right) \tag{9.3}$$

Ahora bien, normalmente estos cálculos se expresan en terminos de la función de densidad de energía $F(\lambda)$, y así es como se expresan en el trabajo realizado por SCP, cuyos datos queremos utilizar. Por ello vamos a calcular la relación entre $N(\lambda)$ y $F(\lambda)$, y expresaremos la diferencia de magnitudes en función de $F(\lambda)$.

La energía de un fotón de longitud de onda λ viene dada por la ecuación

$$E=\frac{hc_0}{\lambda}$$

siendo h la constante de Planck, y c_0 la constante universal para la velocidad de la luz. De esta ecuación deducimos la relación entre las funciones de densidad, sabiendo que la cantidad de energía es el producto del número de fotones por la energía de cada fotón

$$F(\lambda)=N(\lambda)\frac{hc_0}{\lambda}$$

es decir

$$N(\lambda)=\frac{1}{hc_0}\lambda F(\lambda) \tag{9.4}$$

y también

$$N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) = \frac{1}{hc_0}\frac{1}{(1+z)}\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)$$

Sustituímos estos valores en la ecuación (9.3), que expresa la diferencia de magnitudes y tenemos

$$m_z[\lambda_0,\lambda_1] - m[\lambda_0,\lambda_1] =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{1}{hc_0}\lambda F(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{1}{hc_0}\frac{1}{(1+z)}\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda F(\lambda)d\lambda}{\frac{1}{(1+z)}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right)$$

y poniendo el factor $\frac{1}{1+z}$ del denominador como un sumando aparte nos queda

$$m_z[\lambda_0,\lambda_1] - m[\lambda_0,\lambda_1] =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda F(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right) \tag{9.5}$$

En los cálculos que hemos hecho en esta sección hemos supuesto que utilizamos un filtro "perfecto", que deja pasar todos los fotones cuyas longitudes de onda pertenezcan al intervalo $[\lambda_0,\lambda_1]$, y solamente esos, pero en la realidad los filtros utilizados dejan pasar una parte de la cantidad de los fotones que llegan en el intervalo $[\lambda_0,\lambda_1]$, cantidad que varía según la longitud de onda de esos fotones, disminuyendo mas o menos progresivamente en los extremos del intervalo. Cada filtro está caracterizado por una función, $S(\lambda)$, que define la cantidad de fotones que deja pasar para cada longitud de onda, y se llama la función de transmisión del filtro. Si queremos reflejar este hecho en nuestras ecuaciones, solo tenemos que cambiar las integrales definidas estre λ_0 y λ_1, por integrales definidas entre 0 e infinito, y multiplicar al integrando por la función de transmisión del filtro. Es decir, supongamos que estamos midiendo con un filtro denominado X, cuya función

de transmisión se denota por $S_x(\lambda)$, y que la magnitud que medimos con desplazamiento al rojo la llamanos $m_z(X)$, y que la magnitud sin desplazamiento al rojo la llamamos $m(X)$, entonces la ecuación (9.5), que nos da la diferencia entre las magnitudes se convierte en

$$m_z(X) - m(X) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_0^\infty \lambda F(\lambda) S_X(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) S_X(\lambda) d\lambda}\right)$$

normalmente se abusa de la notación y no se escriben los límites de integración, dando por supuesto que son 0 y ∞, quedando la ecuación definitivamente

$$m_z(X) - m(X) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int \lambda F(\lambda) S_X(\lambda) d\lambda}{\int \lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) S_X(\lambda) d\lambda}\right) \tag{9.6}$$

Según vimos en la sección 8, la diferencia entre la magnitud que medimos de una estrella con desplazamiento al rojo, y la magnitud que mediríamos para esa misma estrella si no tuviese desplazamiento al rojo, es lo que se denomina K-correction, que ahora denotaremos por $K_X(z)$, ya que estamos utilizando el filtro X. Pues bien, la diferencia de magnitudes de la ecuación (9.6), es precisamente la diferencia entre la magnitud con desplazamiento al rojo, y la magnitud sin desplazamiento al rojo, ya que las dos estrellas son idénticas y a la misma distancia, es decir la diferencia de magnitudes es $K_X(z)$, luego ya tenemos la ecuación para la K-correction en el modelo de Universo estático.

$$K_X(z) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int \lambda F(\lambda) S_X(\lambda) d\lambda}{\int \lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) S_X(\lambda) d\lambda}\right) \tag{9.7}$$

En el trabajo de SCP y otras publicaciones especializadas[2] se da para la K-correction, siempre según el modelo de Universo en Expansión o Big-Bang, el siguiente valor, que nosotros denotaremos por $K_X^{BB}(z)$

$$K_X^{BB}(z) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int \lambda F(\lambda) S_X(\lambda) d\lambda}{\int \lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) S_X(\lambda) d\lambda}\right)$$

si comparamos esta ecuación con la (9.7) vemos que

$$K_X(z) = 2{,}5\log_{10}(1+z) + K_X^{BB}(z)$$

que es la ecuación (8.5), que era nuestro objetivo demostrar.

Pero si el desplazamiento al rojo es elevado, y queremos saber cual sería la magnitud de la supernova en el filtro X, no podemos utilizar el mismo filtro X para medir la cantidad de luz que nos llega de ella, ya que al ser el desplazamiento al rojo elevado, la mayor parte de la luz no estará dentro del rango de ese filtro, sino de otro con longitud de onda más largo, llamemoslo Y. Por ejemplo, si queremos saber la magnitud en la banda azul, que tendría una supernova con elevado z si no tuviese desplazamiento al rojo, y utilizamos para medir un filtro azul, no captaremos nada de luz, ya que la mayor parte de la luz nos llegará en la banda del rojo o del infrarrojo. De esta forma necesitamos relacionar la magnitud que medimos con el filtro Y, con la magnitud que tendría la supernova en el filtro X. Para ello se utiliza la K-correction cruzada de ambos filtros, que se denota por $K_{XY}(z)$, y cuyo valor vamos a calcular en el modelo de Universo estático. Lo haremos siguiendo la misma linea que hemos utilizado para el calculo de la K-correction de un solo filtro.

Sean las mismas dos estrella definidas al principio de esta sección, idénticas, a la misma distancia, ambas en reposo respecto a nosotros, la luz de la primera no presenta desplazamiento al rojo, y la luz de la segunda presenta un desplazamiento al rojo z. Para medir la magnitud de la estrella que no presenta desplazamiento al rojo, utilizaremos el intervalo de longitudes de onda $[\lambda_0, \lambda_1]$, sea $m[\lambda_0, \lambda_1]$ esa magnitud. Para medir la magnitud de la estrella que si presenta desplazamiento al rojo, utilizaremos el intervalo de longitudes de onda $[\lambda_2, \lambda_3]$, sea $m_z[\lambda_2, \lambda_3]$ esa magnitud. Tenemos dos escalas de magnitudes, la que utiliza el intervalo $[\lambda_0, \lambda_1]$ y

[2] Nugent, P., Kim, A. & Perlmutter, S., 2002 PASP, 114, 817

la que utiliza el intervalo $[\lambda_2, \lambda_3]$, y esto supone que hemos definido la cantidad de fotones recibidos para el valor 0 de cada escala de magnitudes: sean $N_0[\lambda_0, \lambda_1]$ y $N_0[\lambda_2, \lambda_3]$ esas cantidades de fotones. Sea $N(\lambda)$ la función de densidad del número de fotones de la estrella sin desplazamiento al rojo, y sea $N_z(\lambda)$ la función de densidad del número de fotones de la estrella con desplazamiento al rojo. Por la definición de magnitud podemos escribir

$$m[\lambda_0, \lambda_1] = -2{,}5 \log_{10} \left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N(\lambda) d\lambda}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]} \right)$$

$$m_z[\lambda_2, \lambda_3] = -2{,}5 \log_{10} \left(\frac{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} N_z(\lambda) d\lambda}{N_0[\lambda_2, \lambda_3]} \right)$$

pero $N_z(\lambda)$ está relacionado con $N(\lambda)$ de la misma forma que antes, como ya vimos en la ecuación (9.2), es decir

$$N_z(\lambda) = \frac{1}{1+z} N\left(\frac{\lambda}{1+z} \right)$$

y la segunda integral queda

$$m_z[\lambda_2, \lambda_3] = -2{,}5 \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{1+z} \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} N\left(\frac{\lambda}{1+z} \right) d\lambda}{N_0[\lambda_2, \lambda_3]} \right)$$

Ahora hacemos la diferencia de magnitudes

$$m_z[\lambda_2, \lambda_3] - m[\lambda_0, \lambda_1] =$$

$$-2{,}5 \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{1+z} \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} N\left(\frac{\lambda}{1+z} \right) d\lambda}{N_0[\lambda_2, \lambda_3]} \right) - \left(-2{,}5 \log_{10} \left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N(\lambda) d\lambda}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]} \right) \right) =$$

$$= 2{,}5 \log_{10} \left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N(\lambda) d\lambda}{N_0[\lambda_0, \lambda_1]} \frac{N_0[\lambda_2, \lambda_3]}{\frac{1}{1+z} \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} N\left(\frac{\lambda}{1+z} \right) d\lambda} \right) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}\left(\frac{N_0[\lambda_2,\lambda_3]}{N_0[\lambda_0,\lambda_1]}\right) +$$

$$+2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} N(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} N\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right)$$

Al igual que hicimos antes, vamos a expresar las integrales en función de $F(\lambda)$, y para ello tenemos en cuenta que la cantidad de energía es el producto del número de fotones por la energía de cada fotón, que como vimos en la ecuación (9.4) significa

$$N(\lambda) = \frac{1}{hc_0}\lambda F(\lambda)$$

Pero ahora además, tenemos que no se anulan las cantidades que definen el valor 0 para ambas escalas de magnitudes. Normalmente esto se soluciona definiendo la función de distribución de energía $Z(\lambda)$, como la función que proporciona el cero de las escalas de magnitudes, si las medimos teniendo en cuenta la cantidad de energía, no el número de fotones. Si también tenemos en cuenta que la cantidad de energía es el producto del número de fotones por la energía de cada fotón, el cociente entre las cantidades que definen el valor 0 para ambas escalas de magnitudes, queda expresado en función de $Z(\lambda)$ de la siguiente manera

$$\frac{N_0[\lambda_2,\lambda_3]}{N_0[\lambda_0,\lambda_1]} = \frac{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\frac{1}{hc_0}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{1}{hc_0}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}$$

Y así la diferencia de magnitudes queda

$$m_z[\lambda_2,\lambda_3] - m[\lambda_0,\lambda_1] =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) - 2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}\right) +$$

$$+2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{1}{hc_0}\lambda F(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\frac{1}{hc_0}\frac{\lambda}{1+z}F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right) =$$

$$= 2{,}5\log_{10}(1+z) + 2{,}5\log_{10}(1+z) +$$

$$-2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\lambda Z(\lambda)\,d\lambda}\right)+2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda F(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_2}^{\lambda_3}\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)d\lambda}\right) \tag{9.8}$$

De la misma manera que antes, la ecuación que acabamos de encontrar supone que hemos usado filtros perfectos para ambos intervalos, pero los filtros reales no son así, sino que vienen definidos por la función de transmisión del filtro en cuestión, y vamos a expresar la diferencia de magnitudes en función de esas funciones. Para ello, supongamos que la magnitud de la estrella que no presenta desplazamiento al rojo la medimos con el filtro X, que $S_X(\lambda)$ es la función de transmisión del filtro X, y que la magnitud la denotamos por $m(X)$. Igualmente, suponemos que la magnitud de la estrella que presenta el desplazamiento al rojo z la medimos con el filtro Y, que $S_Y(\lambda)$ es la función de transmisión del filtro Y, y que la magnitud la denotamos por $m_z(Y)$. Entonces la ecuación (9.8) que nos da la diferencia de magnitudes se convierte en la siguiente, donde se ha vuelto a abusar de la notación suprimiendo los límites de integración 0 y ∞.

$$m_z(Y)-m(X)=2{,}5\log_{10}(1+z)+2{,}5\log_{10}(1+z)+$$
$$-2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int\lambda Z(\lambda)S_X(\lambda)\,d\lambda}{\int\lambda Z(\lambda)S_Y(\lambda)\,d\lambda}\right)+2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int\lambda F(\lambda)S_X(\lambda)\,d\lambda}{\int\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)S_Y(\lambda)\,d\lambda}\right) \tag{9.9}$$

Esta diferencia de magnitudes es lo que se denomina la K-correction cruzada para los filtros XY , que la ecuación (9.9) nos proporciona para el modelo de Universo estático, y la denotamos por $K_{XY}(z)$. En el trabajo de SCP y en otras publicaciones especializadas[3] se da para la K-correction cruzada para los filtros XY, siempre según el modelo de Universo en Expansión o Big-Bang, el siguiente valor, que nosotros denotaremos por $K_{XY}^{BB}(z)$

$$K_{XY}^{BB}(z)=2{,}5\log_{10}(1+z)+$$
$$-2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int\lambda Z(\lambda)S_X(\lambda)\,d\lambda}{\int\lambda Z(\lambda)S_Y(\lambda)\,d\lambda}\right)+2{,}5\log_{10}\left(\frac{\int\lambda F(\lambda)S_X(\lambda)\,d\lambda}{\int\lambda F\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)S_Y(\lambda)\,d\lambda}\right)$$

[3]Nugent, P., Kim, A. & Perlmutter, S., 2002 PASP, 114, 817

si comparamos esta ecuación con la (9.9) vemos que

$$K_{XY}(z) = 2{,}5\log_{10}(1+z) + K_{XY}^{BB}(z)$$

que es la ecuación (8.5), que era nuestro objetivo demostrar.

10. Observaciones de Supernovas con $z \leq 1$

Para obtener el diagrama de Hubble en el modelo de Universo estático, o sea la relación entre z y distancia, para valores de $z \leq 1$, nos vamos a servir de lo publicado por SCP, en concreto de la curva calculada estadisticamente por ellos que mejor se ajusta a los datos obtenidos y calculados por ellos. Hemos de asignar un valor a M, la magnitud absoluta de la supernova de referencia situada a $10\,pc$, que actua como un factor de proporcionalidad para el cálculo de la distancia, no afectando a la "forma" de la curva que obtengamos. Tomamos el valor $M = -19{,}22$.

Para trazar el diagrama de Hubble tomaremos 20 parejas de datos $\left\{z\,,\,m^{SCP}\right\}$, que obtenemos aumentando z a intervalos de 0,05 desde $z = 0{,}05$ hasta $z = 1$, y para cada uno de esos valores de z, tomamos para m^{SCP} el valor correspondiente según la curva publicada por SCP. Para cada pareja de datos $\left\{z\,,\,m^{SCP}\right\}$ así obtenidos, calculamos los datos que necesitamos y que se muestran en la tabla siguiente, donde para cada fila tenemos:

z. Desplazamiento al rojo, obtenido directamente de la curva publicada por SCP.

m^{SCP}. Magnitud en el sistema de referencia en reposo (magnitud que mostraría la supernova si no presentase desplazamiento al rojo), correspondiente al valor de z, en el modelo de Universo en expansión, obtenido directamente de la curva publicada por SCP.

$\mu^{SCP} = m^{SCP} - M$. Módulo de distancia en el modelo de Universo en expansión. Hemos tomado para la magnitud absoluta el valor $M = -19{,}22$.

D^{SCP}. Distancia expresada en Mpc, en el modelo de Universo en expansión, obtenida a partir de m^{SCP} y M según la ecuación (8.2), o equivalentemente, a partir de μ^{SCP} utilizando la ecuación (8.3). Hablar de distancia en este modelo es ambiguo, ya que la expansión induce varios conceptos de distancia. No obstante hemos introducido este dato en particular, para compararlo con el que se obtiene en el modelo de

Universo estático, donde el concepto distancia no es ambiguo y está definido por esa ecuación.

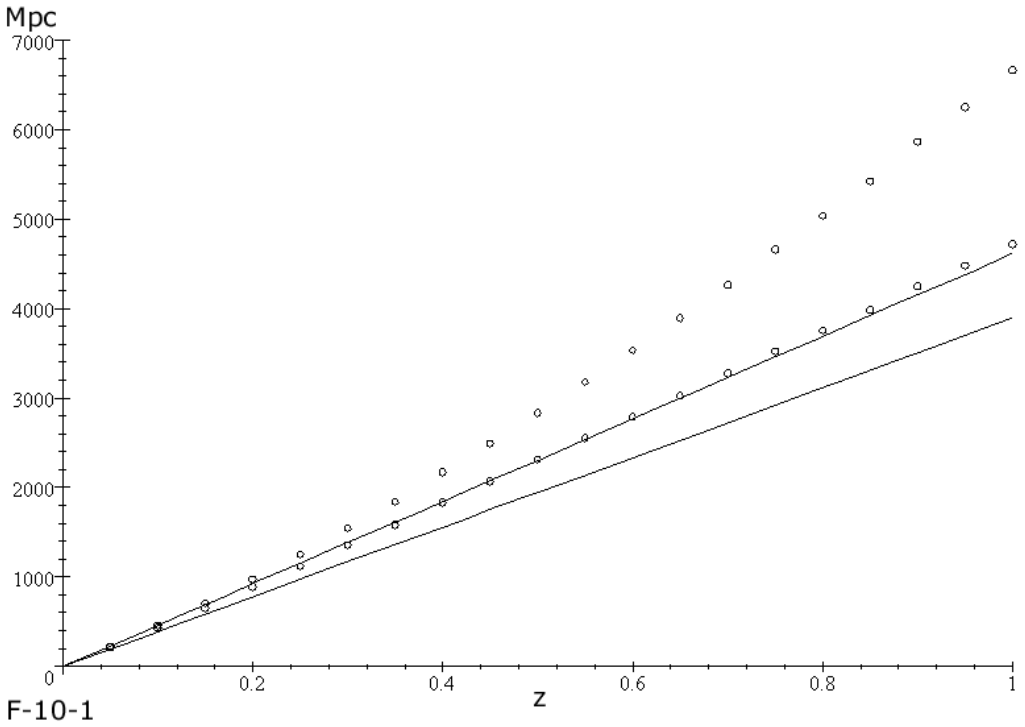
$-2{,}5\log_{10}(1+z)$. Diferencia entre las K-correction de ambos modelos.

m. Magnitud en el modelo de Universo estático, que mostraría la supernova si no presentase desplazamiento al rojo, obtenida con la ecuación $m = m^{SCP} - 2{,}5\log_{10}(1+z)$.

$\mu = m - M$. Módulo de distancia en el modelo de Universo estático. Se ha tomado el mismo valor para la magnitud absoluta, $M = -19{,}22$.

D. Distancia expresada en Mpc, en el modelo de Universo estático. El valor se obtiene a partir de m y M según la ecuación (8.2), o equivalentemente, a partir de μ utilizando la ecuación (8.3).

z	m^{SCP}	μ^{SCP}	D^{SCP}	$-2{,}5\log_{10}(1+z)$	m	μ	D
0.05	17.48	36.70	218.78	-0.053	17.43	36.65	213.50
0.10	19.07	38.29	454.99	-0.103	18.97	38.19	433.81
0.15	20.01	39.23	701.46	-0.152	19.86	39.08	654.11
0.20	20.71	39.93	968.28	-0.198	20.51	39.73	883.91
0.25	21.26	40.48	1247.38	-0.242	21.02	40.24	1115.69
0.30	21.72	40.94	1541.70	-0.285	21.44	40.66	1352.16
0.35	22.10	41.32	1836.54	-0.326	21.77	40.99	1580.64
0.40	22.46	41.68	2167.70	-0.365	22.09	41.31	1832.04
0.45	22.76	41.98	2488.86	-0.403	22.36	41.58	2066.88
0.50	23.04	42.26	2831.39	-0.440	22.60	41.82	2311.82
0.55	23.29	42.51	3176.87	-0.476	22.81	42.03	2551.73
0.60	23.52	42.74	3531.83	-0.510	23.01	42.23	2792.16
0.65	23.73	42.95	3890.45	-0.544	23.19	42.41	3028.71
0.70	23.93	43.15	4265.80	-0.576	23.35	42.57	3271.72
0.75	24.12	43.34	4655.86	-0.608	23.51	42.73	3519.50
0.80	24.29	43.51	5035.01	-0.638	23.65	42.87	3752.87
0.85	24.45	43.67	5420.01	-0.668	23.78	43.00	3984.87
0.90	24.62	43.84	5861.38	-0.697	23.92	43.14	4252.29
0.95	24.76	43.98	6251.73	-0.725	24.03	43.25	4476.95
1.00	24.90	44.12	6668.07	-0.753	24.15	43.37	4715.04



En la figura F-10-1 se representan graficamente D^{SCP}, D y las dos rectas de Hubble para el intervalo 71 ± 6, esto es la recta con $H_0 = 77$, que es la situada en la posición inferior y la recta con $H_0 = 65$, que es la situada en la posición superior. Los datos correspondientes a D^{SCP} se han representado con un círculo para cada valor de z, y forman la sucesión en la posición superior. Los datos correspondientes a D también se han representado con un círculo para cada valor de z, y forman la sucesión en la posición inferior.

Vemos claramente como la sucesión de los valores correspondientes a D^{SCP} aumentan progresivamente su pendiente, y eso significa que la constante de Hubble disminuye progresivamente con la distancia, y dado que mayor distancia significa mayor antigüedad, se sigue que a mayor antigüedad la constante de Hubble es menor, y como la constante de Hubble está directamente relacionada con la velocidad de expansión del Universo (z se interpreta como resultado del efecto Doppler y $z = \dfrac{H_0}{c_0} D$, es decir z es directamente proporcional a H_0), se concluye que la tasa de expansión del Universo ha ido creciendo hasta nuestros días, o sea el Universo está en expansión acelerada. Esta es la explicación dentro del modelo de Universo en expansión, que dan algunos autores a estos datos observados.

En el modelo de Universo estático, la sucesión de los valores correspondientes a D, se aproximan a una línea recta, aunque con un valor para la constante de Hubble que queda por debajo del intervalo estimado, aproximadamente $H_0 \simeq 64$.

11. Comparación con los modelos de Universo Estático

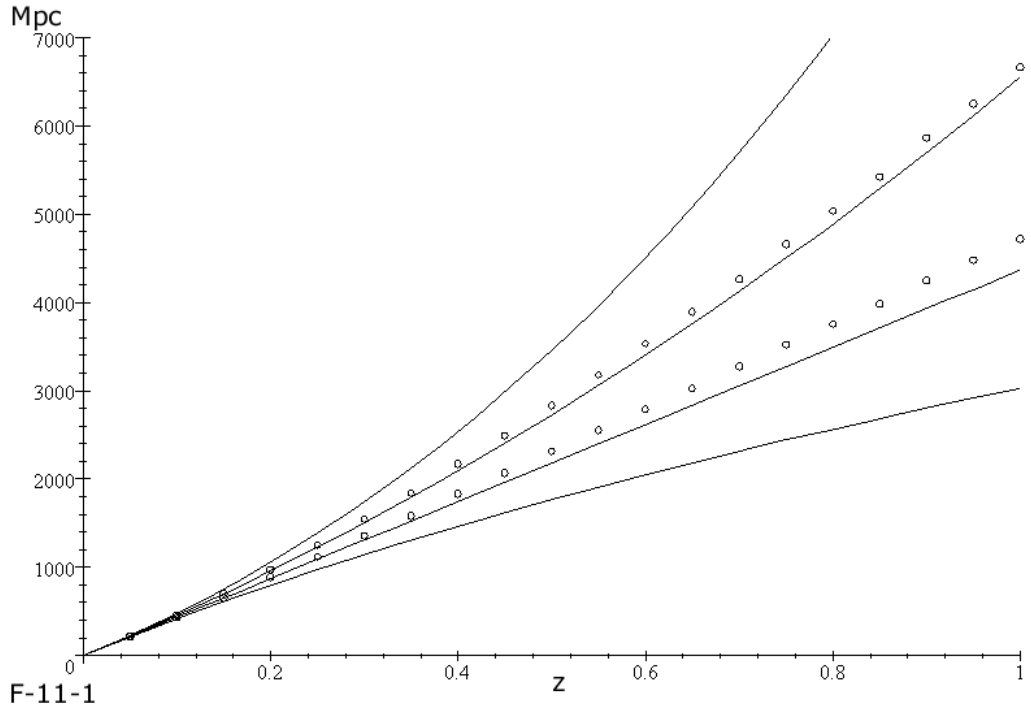
Ante todo tenemos que hacer una aclaración respecto de los 4 modelos para Universo estático desarrollados en este escrito. En todos ellos el desplazamiento al rojo se considera producido por efectos gravitatorios sobre la luz debido a su propio movimiento. El fundamento de esta suposición implica además que, si la luz avanza en contra de un campo gravitatorio, su longitud de onda se desplazará al rojo, y si avanza a favor se desplazará al azul. En los 4 modelos, las ecuaciones se han obtenido suponiendo que la luz que llega al sensor, es emitida por una fuente de luz en reposo respecto de él, en ausencia de campos gravitatorios, sin extinción intergalactica, y el propio sensor está en ausencia de campos gravitatorios. Para visualizarlo, podemos imaginar una pequeña linterna situada en el espacio, alejada de cualquier masa que produzca un campo gravitatorio apreciable, y con un camino despejado hasta el sensor, también alejado de masas apreciables. Esta situación, no es precisamente el escenario donde se emite la luz de las supernovas y donde están nuestros sensores.

Las supernovas tienen una masa considerable, unas 10 veces la masa del sol, que produce un campo gravitatorio que afecta a las condiciones iniciales de la luz. También se verá afectada la luz por el campo gravitatorio de la galaxia donde está situada la supernova, aunque posiblemente en menor medida.

Las supernovas están en explosión, y esto produce una velocidad de acercamiento hacia nosotros por parte de la materia que emite la luz. Se produce entonces un desplazamiento al azul en las condiciones iniciales.

Por último, al llegar la luz a nuestra galaxia y planeta, estará efectada de nuevo por otros campos gravitatorios que producirán un desplazamiento al azul.

Pasamos ahora a representar gráficamente en la figura F-11-1 los 4 modelos junto a los datos D^{SCP}y D .



Los datos correspondientes a D^{SCP} se han representado con un círculo para cada valor de z, y forman la sucesión en la posición superior. Los datos correspondientes a D también se han representado con un círculo para cada valor de z, y forman la sucesión en la posición inferior.

El modelo que considera la velocidad de la luz constante sigue la eccuación (2.9)

$$x = \frac{c_0^2}{\hat{G}} \ln(1+z)$$

que expresada en Mpc es la ecuación (2.10)

$$D = 4365{,}5 \ln(1+z)$$

y se corresponde con la línea inferior. Vemos que dista mucho de los datos correspondientes a D.

El modelo que considera la velocidad de la luz creciente, con aceleración de

su movimiento proporcional a la velocidad, sigue la ecuación (4.8)

$$x = \frac{c_0^2}{\hat{G}} z$$

que expresada en Mpc es la ecuación (4.9)

$$D = 4365{,}5\, z$$

y se corresponde con la segunda línea empezando por abajo. Vemos que es la que más se acerca a la sucesión de datos D, aunque no coincide.

El modelo que considera la velocidad de la luz creciente, con aceleración de su movimiento constante, sigue la ecuación (5.2)

$$x = \frac{c_0^2}{\hat{G}} (z + \frac{1}{2} z^2)$$

que expresada en Mpc es la ecuación (5.3)

$$D = 4365{,}5 (z + \frac{1}{2} z^2)$$

y se corresponde con la tercera línea empezando por abajo. Vemos que se aleja mucho de la sucesión de datos D, y casi coincide con la sucesión de datos D^{SCP}, aunque esta coincidencia no sirve de mucho pues se trata de modelos de Universo distintos.

El modelo que considera la velocidad de la luz creciente, con aceleración de su movimiento inversamente proporcional a la velocidad, sigue la ecuación (6.4)

$$x = \frac{c_0^2}{\hat{G}} \left(z + z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right)$$

que expresada en Mpc es la ecuación (6.5)

$$D = 4365{,}5 \left(z + z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right)$$

y se corresponde con la cuarta línea empezando por abajo. Vemos que es la que más se aleja de la sucesión de datos D.

12. Conclusiones

Habría que rehacer las ecuaciones, teniendo en cuenta las consideraciones sobre las condiciones iniciales que impone la supernova y los otros condicionantes, para ver cual de los modelos se aproxima mejor a los datos observados.

Tanto el campo gravitatorio de la supernova como la extinción galáctica producirán, independientemente, un aumento de los valores de la distancia calculada por los modelos, lo cual favorece al primer y segundo modelo. Sin embargo los modelos tercero y cuarto se alejarán aún más de los datos observados. Por otra parte, ya se mencionó en la sección 8, que las posibles correcciones por el factor de alargamiento están por deteminar. También tenemos que decir, que los datos utilizados en este escrito procedentes de SCP, se han obtenido de la curva por ellos calculada que mejor se adapta a los datos calculados por ellos. Sería interesante tomar los datos de cada supernova calculados por SCP, y después de aplicar las correcciones necesarias según el modelo de Universo estático, calcular la curva que mejor se adapta a esos datos, utilizando el método estadístico apropiado. Tal vez haya una diferencia entre un modo u otro de calcular la curva que mejor se adapta.

Veamos, a modo de ejemplo orientativo para futuras investigaciones, como afectarían al modelo 2 las condiciones iniciales debidas a la supernova.

Analizemos lo que sucede a los fotones con longitud de onda λ_0 que emite la supernova. Dado que la supernova está en explosión, la materia que emite los fotones se acerca a nosotros, produciéndose un desplazamiento al azul. Denotemos por λ_{-0}, la longitud de onda acortada por esta causa. Por otra parte, debido al intenso campo gravitatorio de la supernova, el fotón se ve acelerado con una aceleración que es considerablemente mayor que la supuesta por el modelo 2, de forma que su velocidad crece rápidamente, aunque pronto esa aceleración extra desaparecerá, pues disminuye con el cuadrado de la distancia. Con el aumento de la velocidad, se producirá un desplazamiento al rojo, y llegará un momento en que la longitud de onda "acortada" λ_{-0}, se convierta de nuevo en λ_0, la longitud de onda "original" del fotón, eso si, la velocidad habrá aumentado a digamos c_1, con $c_1 > c_0$. Supongamos que en ese momento, la aceleración gravitatoria producida por la supernova ya es despreciable, y solo queda la aceleración propia del modelo 2

$$a = \frac{\hat{G}}{c_0} c$$

Podemos ahora rehacer las ecuaciones del modelo 2 para calcular la distancia re-

corrida por la luz desde ese momento hasta que llega a nosotros, es decir, tomamos como velocidad inicial c_1, como aceleración la propia del modelo 2, y para la relación entre entre desplazamiento al rojo y velocidad, sabiendo que la frecuencia es constante,

$$c = c_1(1+z)$$

siendo c la velocidad con que llega a nosotros la luz. Operando como en la sección 4 obtenemos

$$c(t) = c_1 e^{\frac{\hat{G}}{c_0}t}$$

e igualando esta ecuación con $c = c_1(1+z)$, obtenemos

$$z = e^{\frac{\hat{G}}{c_0}t} - 1 \tag{12.1}$$

Calculamos la distancia como en la sección 4 y obtenemos

$$x(t) = \frac{c_1 c_0}{\hat{G}} \left[e^{\frac{\hat{G}}{c_0}t} - 1 \right]$$

y utilizando el valor obtenido en la ecuación (12.1), resulta

$$x(t) = \frac{c_1 c_0}{\hat{G}} z$$

Si comparamos esta ecuación con la obtenida en la sección 4, ecuación (4.8)

$$x(t) = \frac{c_0^2}{\hat{G}} z$$

vemos que la nueva ecuación también es una recta, solo que con mayor pendiente, pues $c_1 > c_0$.

Si nos fijamos en la figura (F-11-1) de la sección 11, donde se muestran los datos observados y los obtenidos por los modelos, vemos que es algo así lo que necesitamos para que coincida el modelo 2 con los datos observados. Podríamos incluso calcular el valor de c_1 para que coincidieran muy exactamente:

Si tenemos en cuenta el valor de la distancia D, expresada en Mpc, para $z = 1$, según vimos en la ecuación (4.9) de la sección 4

$$D = \frac{c_0^2}{\hat{G}} \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} z = \frac{c_0^2}{\hat{G}} \frac{1}{3{,}08568 \times 10^{24}} 1 = 4365{,}5\, Mpc$$

es decir

$$\frac{c_0^2}{\hat{G}}\frac{1}{3{,}08568\times 10^{24}} = 4365{,}5\,Mpc \tag{12.2}$$

Pero según la nueva ecuación, y tomando para D el valor observado que aparece en la tabla de datos de la sección 10

$$D = \frac{c_0 c_1}{\hat{G}}\frac{1}{3{,}08568\times 10^{24}}\,z = \frac{c_0 c_1}{\hat{G}}\frac{1}{3{,}08568\times 10^{24}}\,1 = 4715\,Mpc$$

es decir

$$\frac{c_0 c_1}{\hat{G}}\frac{1}{3{,}08568\times 10^{24}} = 4715\,Mpc \tag{12.3}$$

si ahora hacemos el cociente entre las ecuaciones (12.3) y (12.2) tenemos

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{4715}{4365{,}5} = 1{,}08$$

es decir, c_1 habría de ser un 8 % mayor que c_0, la constante para la velocidad de la luz, para que el modelo 2 encajase exactamente con los datos observados, dentro del contexto de este sencillo ejemplo que hemos desarrollado.

Hay una consideración que hace al segundo modelo más interesante que el primero, y es la observación que se tiene de la proporción entre el desplazamiento al rojo, y la dilatación temporal de la curva de luz de las supernovas, por otra parte una de las mayores bazas actuales del modelo del Big-Bang. Esta dilatación temporal se explicaría en el modelo de velocidad creciente, por el hecho de que la supernova pierde masa a gran ritmo, pues emite tanta energía como todas las estrellas de una galaxia juntas, y la energía que emite se traduce en una pérdida de masa. Por ello la masa en la fecha del pico de la explosión, será mayor que la masa transcurridos unos días. Con esto, en la fecha del pico de la explosión, la velocidad inicial proporcionada a la luz por la masa gravitatoria de la supernova, será mayor que la velocidad inicial que proporciona la menor masa gravitatoria transcurridos unos días. Y como en definitiva, se trata de un movimiento acelerado, a mayor velocidad inicial, antes se recorre una distancia, con lo que dos eventos separados un intervalo de tiempo medido en la supernova, se recibirán con un intervalo de tiempo mayor por un observador alejado, y además a mayor distancia, más aumentará el intervalo medido por el observador. Esto explicaría la dilatación temporal de la curva de luz de las supernovas. En el primer modelo esta observación no tiene explicación ya que la velocidad de la luz es constante. De ser cierto el segundo modelo, si pudiesen medirse los desplazamientos al rojo de la luz de una supernova

en dos fechas distintas, se vería que no serían iguales, siendo mayor el medido en la fecha del pico de la explosión, que el medido días después, ya que la velocidad con la que llegaría la luz sería mayor en la fecha del pico.

Por último decir que, la idea que en este escrito se propone para la gravedad, podría explicar un hecho referente a la velocidad de giro de las galaxias. Se ha observado, que las diferentes partes de las galaxias, no giran a la velocidad que se esperaría en función de su distancia al centro, según la concepción actual de la gravedad como una atracción. Sin embargo, la idea que aquí se propone es que la gravedad es un empuje procedente del resto del Universo, con lo que la gravedad tendrá un valor máximo, que se conseguirá si neutralizamos el empuje procedente de la mitad del Universo. Esto puede darse en el caso de las galaxias, debido a su gran masa, de modo que la fórmula de la gravitación de Newton no serviría para grandes masas, ya que alcanzado un valor máximo para el empuje, ya no aumentaría este por el hecho de añadir más masa.

A la vista de lo expuesto, el segundo modelo parece el mejor candidato para explicar lo que se observa, es decir, la velocidad de la luz aumenta, y lo hace de forma directamente proporcional a su propia velocidad. Por supuesto, se impone medir la velocidad de la luz que nos llega de galaxias lejanas, o medir directamente su frecuencia, lo que sería equivalente, para aceptar o rechazar este modelo. En el apéndice se propone una forma experimental para determinar la velocidad con la que llega la luz procedente de galaxias lejanas.

Creemos que se abre una puerta hacia una explicación alternativa al incuestionable Big-Bang, reconsiderando el Universo como estático, y con ello infinito y eterno.

Apéndice. Medición de la velocidad de la luz.

Supongamos que un planeta u otro objeto “cercano” se interpone entre nosotros y una galaxia lejana. En el momento en que el planeta tapa la luz de la galaxia hacia nosotros, el propio planeta empieza a enviarnos luz reflejada del sol desde esa posición, de forma que el último rayo de luz de la galaxia que no es tapado por el planeta, parte hacia nosotros en el mismo instante en que el primer rayo de luz del planeta también lo hace. Si la velocidad de la luz de la galaxia es mayor que la velocidad de la luz del planeta, la última luz de la galaxia llegará antes que la primera del planeta, de forma que habrá un intervalo de tiempo entre la

llegada de uno y otro rayo, y como consecuencia, durante un intervalo de tiempo que depende del diámetro del planeta, no nos llegará nada, ni luz de la galaxia ni luz del planeta, veremos un espacio negro con la forma del disco del planeta, situado en una posición más avanzada de la trayectoria del planeta, y moviéndose a la misma velocidad que el planeta.

Vamos a exponer este razonamiento con ecuaciones.

Denotemos por X la posición en la esfera celeste que ocupa el planeta, en el instante t en que tapa la luz de la galaxia. X es la posición real en el instante t, no la que nosotros observamos en ese instante, que será más retrasada. Para facilitar el cálculo supongamos que el planeta se mueve respecto a nosotros con velocidad V, en dirección perpendicular a la recta nosotros-planeta-galaxia. Sea x la distancia entre el planeta y nosotros en ese instante t. Sea c_0 la velocidad de la luz procedente del planeta, y denotemos por T_{planet} el intervalo de tiempo que necesita la luz del planeta para llegar hasta nosotros desde la posición X , entonces

$$x = c_0 T_{planet} \tag{12.4}$$

Pero cuando la luz del planeta llega a nosotros, el planeta ya no se encuentra allí donde lo vemos, sino en una posición más avanzada de su trayectoria, concretamente habrá recorrido la distancia $A = VT_{planet}$. Y viceversa, cuando el planeta ocupa la posición real X, la posición que nosotros observamos es una posición anterior de su trayectoria, justamente a distancia $A = VT_{planet}$.

Podemos calcular cuál es el ángulo α, expresado en radianes, entre la posición real X y la posición que observamos

$$\alpha = \frac{A}{x} = \frac{VT_{planet}}{c_0 T_{planet}} = \frac{V}{c_0}\, rad$$

Veamos ahora que ocurre con la luz de la galaxia. En el instante t, cuando el planeta ocupa la posición X, el planeta tapa la luz de la galaxia, y el último rayo de luz de la galaxia que no es tapado, empleará un intervalo de tiempo T_{galaxy} en llegar a nosotros desde la posición real X. Si denotamos por c la velocidad de la luz procedente de la galaxia, tenemos

$$T_{galaxy} = \frac{x}{c} \tag{12.5}$$

Entonces tenemos que la última luz de la galaxia llegará a nosotros en el instante $t + T_{galaxy}$, mientras que la primera luz del planeta llegará en el instante $t + T_{planet}$. Ahora bien, si $c > c_0$, transcurrirá un intervalo de tiempo, $\triangle T$, desde que llega la última luz de la galaxia, hasta que llega la primera del planeta, es decir

$$\triangle T = \left(t + T_{planet}\right) - \left(t + T_{galaxy}\right) = T_{planet} - T_{galaxy}$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (12.4) y (12.5)

$$\triangle T = T_{planet} - \frac{x}{c} = T_{planet} - \frac{x}{c_0}\frac{c_0}{c} = T_{planet} - T_{planet}\frac{c_0}{c}$$

y sacando factor común

$$\triangle T = T_{planet}\left(1 - \frac{c_0}{c}\right) \tag{12.6}$$

Es decir, desde el instante $t + T_{galaxy}$, y durante un intervalo de tiempo que depende del diámetro del planeta, no nos llegará nada desde la posición X de la esfera celeste, ni luz de la galaxia ni luz del planeta, solo veremos un disco negro con la forma y tamaño del disco del planeta. Observaremos el plantea en la posición X, transcurrido el intervalo de tiempo $\triangle T$, desde que "desaparece" la galaxia de la posición X.

De la ecuación (12.6) podemos despejar c

$$\frac{\triangle T}{T_{planet}} = 1 - \frac{c_0}{c} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\triangle T}{T_{planet}} = \frac{c_0}{c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{c_0}{1 - \dfrac{\triangle T}{T_{planet}}}$$

es decir

$$c = c_0 \frac{T_{planet}}{T_{planet} - \triangle T}$$

que si la queremos expresar en función de la distancia x, en lugar de T_{planet}, nos queda

$$c = c_0 \frac{\dfrac{x}{c_0}}{\dfrac{x}{c_0} - \triangle T} = c_0 \frac{x}{x - c_0 \triangle T}$$

o sea, que si medimos $\triangle T$, y conocemos la distancia al planeta, x, podemos determinar la velocidad c, de la luz procedente de la galaxia.

Podemos calcular qué distancia angular, $\triangle \alpha$, habrá entre el disco negro y la posición que observaremos para el planeta, teniendo en cuenta que desde que "aparece" el disco negro en el instante $t + T_{galaxy}$, falta el intervalo de tiempo $\triangle T$ para que llegue la primera luz del planeta. Entonces, si el planeta recorre en el intervalo T_{planet} la distancia angular α, en el intervalo $\triangle T$ recorrerá la distancia angular $\triangle \alpha$

$$\triangle \alpha = \alpha \frac{\triangle T}{T_{planet}}$$

y si sustituímos el valor de $\triangle T$ por el obtenido en la ecuación (12.6) tenemos

$$\triangle\alpha = \alpha\frac{T_{planet}\left(1-\frac{c_0}{c}\right)}{T_{planet}} = \alpha\left(1-\frac{c_0}{c}\right)\ rad$$

es decir, el disco negro precederá al planeta, con una distancia angular $\triangle\alpha$, que también podemos expresar en función de la velocidad del planeta, sabiendo que

$$\alpha = \frac{V}{c_0}$$

y tenemos

$$\triangle\alpha = \frac{V}{c_0}\left(1-\frac{c_0}{c}\right)\ rad$$

De esta ecuación podemos despajar c

$$\frac{c_0}{V}\triangle\alpha = 1-\frac{c_0}{c} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{c_0}{V}\triangle\alpha = \frac{c_0}{c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{c_0}{1-\frac{c_0}{V}\triangle\alpha}$$

que también podemos escribir como

$$c = c_0\frac{V}{V-c_0\triangle\alpha}$$

o sea, que si medimos $\triangle\alpha$, y conocemos la velocidad del planeta, V, podemos determinar la velocidad c, de la luz procedente de la galaxia.

Si queremos expresar $\triangle T$ y $\triangle\alpha$ en función de z, el desplazamiento al rojo de la galaxia, dado que $c = c_0(1+z)$ según el modelo de Universo con velocidad creciente, tenemos que la expresión

$$1-\frac{c_0}{c}$$

se convierte en

$$1-\frac{c_0}{c} = 1-\frac{c_0}{c_0(1+z)} = 1-\frac{1}{1+z} = \frac{1+z-1}{1+z} = \frac{z}{1+z}$$

y ahora sustituímos en las ecuaciones que nos dan el valor de $\triangle T$ y $\triangle\alpha$

$$\triangle T = T_{planet}\left(1-\frac{c_0}{c}\right) = T_{planet}\left(\frac{z}{1+z}\right)$$

$$\triangle\alpha = \frac{V}{c_0}\left(1 - \frac{c_0}{c}\right) = \frac{V}{c_0}\left(\frac{z}{1+z}\right)\ rad$$

Es decir, conocido el z de una galaxia y la velocidad lineal del planeta podemos saber qué ángulo, $\triangle\alpha$, habrá entre la posición que observamos del planeta y la posición del disco negro que ocultará la galaxia. Si además conocemos la distancia al planeta, también sabemos cuanto tiempo, $\triangle T$, pasará hasta que el planeta empiece a verse en la posición que ocupa ahora el disco negro.

Con un razonamiento similar, podemos deducir que cuando llegue la luz del planeta, también llegará la luz de la galaxia, pues al ir más rápida habrá alcanzado a la luz del planeta, de forma que observaremos las dos imágenes superpuestas, como si el planeta fuese transparente para la luz de la galaxia.

Dado que la luz de la galaxia puede ser demasiado debil para llevar a cabo este experimento, lo ideal sería contar con una supernova en la galaxia, para ver como desaparece antes que el planeta llegue a su posición, y si es posible, ver después la supernova superpuesta con la imagen del planeta.

A todas las personas que dudan de lo establecido, porque gracias a ellas avanza el conocimiento.

Depósito Legal: MU - 100 - 2011
ISBN : 978 - 84 - 936200 - 4 - 2
Editorial: Kiosco JMC

La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, queda expresamente autorizada por quien la ha escrito, siempre y cuando se haga sin ánimo de lucro.