Bernardo Cascales
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Murcia.
Tfno. +34+968364174
Fax. +34+968364182
e-mail: beca@um.es

Análisis Complejo[1] 25 de Enero de 2008

TEORÍA:

T.1 (*1 punto*) Teorema de Montel.
T.2 (*1 punto*) Lema de Schwarz.

CUESTIONES: *(0.5 puntos cada una)* Marca las respuestas verdaderas con V y falsas con F:

C1 Consideremos el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}$. Entonces:

- *a*) Aunque $\lim_n \cos \frac{z}{n} = 1$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}$ no converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.
- *b*) $\lim_n \cos \frac{z}{n} = 1$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.
- *c*) La derivada logarítmica del producto $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}$ define una función meromorfa en $\mathbb{C}$.
- *d*) El producto $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}$ define una función entera con ceros aislados.
- *e*) Ninguna de las anteriores.

C2 Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Entonces:

- *a*) Si $f(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{C}$, f es constante.
- *b*) Si $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$, f es constante.
- *c*) Si $f(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$, f es constante.
- *d*) Si $\operatorname{Re} f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{R}$, f es constante.
- *e*) Ninguna de las anteriores.

C3 Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones enteras y f una función definida en $\mathbb{C}$ tal que para cada $a \in \mathbb{C}$ existe $r > 0$ tal que $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente sobre $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$. Entonces:

- *a*) f es entera.
- *b*) f no tiene porque ser continua.
- *c*) Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = e^{p_n}$ donde p_n es un polinomio no constante, entonces f no puede ser la función identidad.
- *d*) e^{f_n} converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.
- *e*) Ninguna de las anteriores.

C4 Sean a, b dos puntos distintos de $\mathbb{C}$, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ y $u(z) = \log \left| \dfrac{z-a}{z-b} \right|$ para $z \in \Omega$. Entonces:

- *a*) u es continua en Ω pero u no es armónica en Ω.
- *b*) u es armónica en Ω porque u es holomorfa en Ω.
- *c*) u es armónica en Ω y por tanto tiene la propiedad de la media en Ω.
- *d*) Como $z \to \frac{z-a}{z-b}$ no tiene logaritmo continuo en Ω, u no tiene armónica conjugada en Ω.
- *e*) Ninguna de las anterioriores.

[1] Poner el nombre. Identificar en la forma debida las preguntas que se contestan. La utilización de expresiones simbólicas, que eventualmente conducen a otras, deberían ser explicadas convenientemente. Subrayar (resaltar en un cuadro) el resultado, respuesta, etc.

Bernardo Cascales
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Murcia.
Tfno. +34+968364174
Fax. +34+968364182
e-mail: beca@um.es

PROBLEMAS:

P.1 (*1.5 puntos*) Utilizar un método de variable compleja para establecer la igualdad

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

P.2 (*1.5 puntos*) Demostrar que la función $u(x+iy) = \cosh y \sin x$ es armónica en $\mathbb{C}$. Encontrar las funciones armónicas conjugadas v de u y expresar $u + iv$ en términos de la variable compleja $z = x + iy$.

P.3 (*1.5 puntos*) Pruébese que la forma general de las transformaciones de Möbius T que transforman el semiplano $P := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ en si mismo es:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0.$$

Obtener la forma general de todas las biyecciones conformes f de P sobre P.

P.4 (*1.5 puntos*) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función exponencial y sea T la transformación de Möbius dada por $z \to \frac{z-1}{z+1}$. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones razonando detalladamente la respuesta.

a) f es inyectiva al restringirla a cualquier banda vertical de anchura menor que 2π.

b) f lleva la semibanda $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{ Im } z < 2\pi, \text{ Re } z < 0\}$ en el disco unidad $D(0,1)$.

c) $T \circ f$ es una biyección holomorfa de $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{ Im } z < \frac{\pi}{2}\}$ sobre el disco unidad $D(0,1)$.