PARTE 1
MECANICA

El fenómeno más obvio y fundamental que observamos a nuestro alrededor es el de *movimiento*. El viento, las olas, los pájaros que vuelan, los animales que corren, las hojas que caen — todos estos son fenómenos de movimiento. Prácticamente todos los procesos imaginables pueden describirse como el movimiento de ciertos objetos. La tierra y los planetas se mueven alrededor del sol; los electrones se mueven en el interior del átomo, dando lugar a la absorción y a la emisión de luz, o se mueven en el interior de un metal, produciendo una corriente eléctrica; las moléculas de gas se mueven, dando lugar a la presión. Nuestra experiencia diaria nos dice que el movimiento de un cuerpo es influenciado por los cuerpos que lo rodean; esto es por sus *interacciones* con ellos. Lo que el físico y el ingeniero hacen, esencialmente, es ordenar las cosas de tal manera que, bajo la interacción mutua de las partículas, se produzca una cierta clase de movimiento. En un tubo de televisión, el haz de electrones debe moverse de una cierta manera para producir una imagen en la pantalla. En una máquina térmica, las moléculas del combustible quemado deben moverse de tal manera que un pistón o una turbina se muevan a su vez en una dirección deseada. Una reacción química es la consecuencia de ciertos movimientos atómicos que dan por resultado un nuevo ordenamiento, formando nuevas clases de moléculas. El papel del físico es descubrir las razones de todos estos movimientos y el papel del ingeniero es ordenar las cosas de modo que se produzcan movimientos útiles, movimientos que hagan la vida más fácil. Hay varias reglas generales o principios que se aplican a todas las clases de movimiento, no importa cual sea la naturaleza de las interacciones. Este conjunto de principios, y la teoría que los sustenta, se denomina *mecánica*.

Para analizar y predecir la naturaleza de los movimientos que resultan de las diferentes clases de interacciones, se han inventado algunos conceptos importantes, tales como los de *momentum*, *fuerza* y *energía*. Si el momentum, la fuerza, y/o la energía se conocen y se expresan en un modo cuantitativo es posible establecer reglas mediante las cuales pueden predecirse los movimientos resultantes. El momentum, la fuerza y la energía son tan importantes que raramente podemos analizar un proceso sin expresarlo en función de ellos.

La mecánica, que es la ciencia del movimiento, es también la ciencia del momentum, la fuerza y la energía. Es una de las áreas fundamentales de la física, y debe comprenderse completamente antes de iniciar una consideración de interacciones particulares. En tiempo de Galileo ya se reconocía este papel básico de la mecánica, estando condensada la idea en la proposición, "*ignorato motu, ignoratur natura*". La mecánica se estudiará en los capítulos 5 a 12.

La ciencia de la mecánica como la comprendemos hoy día es el resultado principalmente del genio de Sir Isaac Newton, que produjo la gran síntesis denominada principios de Newton. Sin embargo, muchas personas más han contribuido a su avance. Algunos de los nombres más ilustres son Arquímedes, Galileo, Kepler, Descartes, Huygens, Lagrange, Hamilton, Mach y Einstein.

5
CINEMATICA

5.1 Introducción

Decimos que un objeto se encuentra en movimiento relativo con respecto a otro cuando su posición, medida relativa al segundo cuerpo, está cambiando con el tiempo. Por otra parte, si esta posición relativa no cambia con el tiempo, el objeto se encuentra en reposo relativo. Tanto el movimiento como el reposo son conceptos relativos; esto es, dependen de la condición del objeto con relación al cuerpo que se usa como referencia. Un árbol y una casa se encuentran en reposo relativo con respecto a la tierra, pero en movimiento con respecto al sol. Cuando un tren pasa por una estación decimos que el tren está en movimiento relativo con respecto a la estación. Pero un pasajero del tren bien puede decir que la estación se encuentra en movimiento en la dirección opuesta. Por ello, para describir un movimiento, entonces, el observador debe definir un *sistema de referencia* con relación al cual se describe el sistema en movimiento. En la Fig. 5-1 hemos indicado dos observadores O y O' y una partícula P. Estos observadores utilizan los sistemas de referencia XYZ y $X'Y'Z'$, respectivamente. Si O y O' se encuentran en reposo entre sí, observarán el mismo movimiento de P. Pero si O y O' se encuentran en movimiento relativo, sus observaciones del movimiento de P serán diferentes.

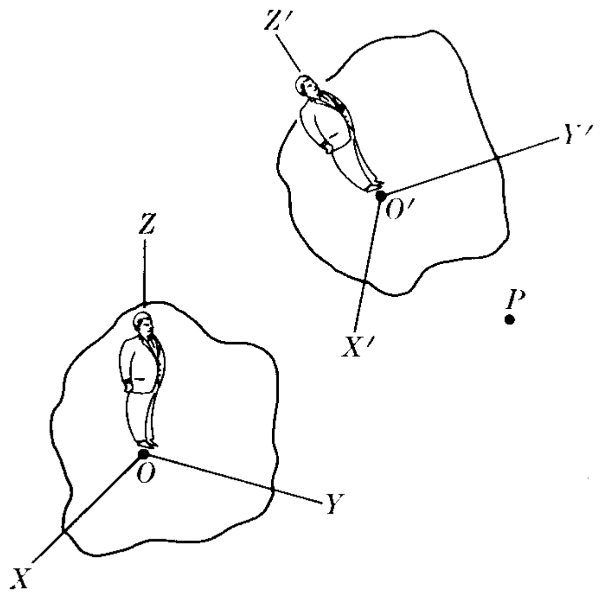


Fig. 5-1. Dos observadores diferentes estudian el movimiento de P.

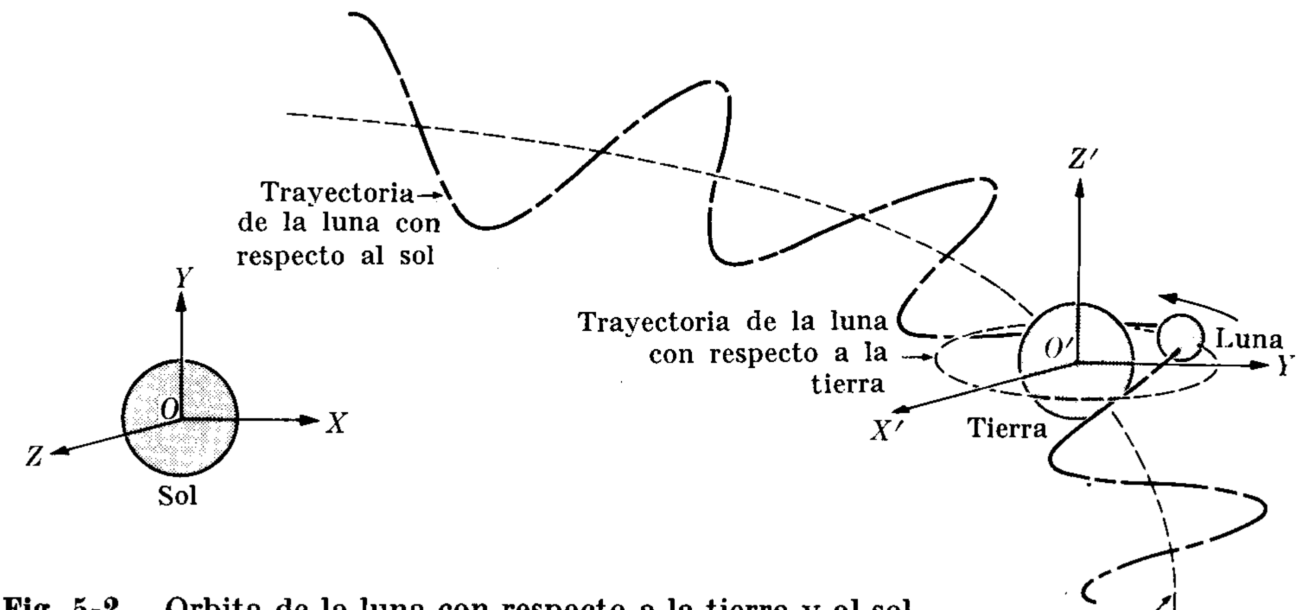


Fig. 5-2. Orbita de la luna con respecto a la tierra y al sol. La distancia tierra-luna es solamente 4×10^{-3} la distancia tierra-sol. Las ondulaciones en la órbita lunar se han exagerado considerablemente.

Por ejemplo, consideremos dos observadores, uno sobre el sol y el otro sobre la tierra (Fig. 5-2) estudiando ambos el movimiento de la luna. Para un observador terrestre que usa el sistema de referencia $X'Y'Z'$, la luna parece describir una órbita casi circular alrededor de la tierra. Sin embargo, para el observador situado en el sol, que usa el sistema XYZ, la órbita de la luna aparece como una línea ondulante. Sin embargo, si los observadores conocen su movimiento relativo, pueden fácilmente reconciliar sus observaciones respectivas. En el capítulo 6 discutiremos en más detalle este tema importante de comparar datos obtenidos por observadores que se encuentran en movimiento relativo. Por el momento supondremos que tenemos un sistema de referencia bien definido.

5.2 *Movimiento rectilíneo: velocidad*

El movimiento de un cuerpo es rectilíneo cuando su trayectoria es una recta. Consideremos que el eje OX de la fig. 5.3 coincide con la trayectoria. La posición del objeto está definida por su desplazamiento medido desde un punto arbitrario O, u origen. En principio, el desplazamiento puede relacionarse con el tiempo mediante una relación funcional $x = f(t)$. Obviamente, x puede ser positiva o negativa. Supongamos que en el tiempo t el objeto se encuentra en la posición A, siendo $OA = x$. Más tarde en el tiempo t', se encuentra en B, siendo $OB = x'$. La *velocidad promedio* entre A y B está definida por

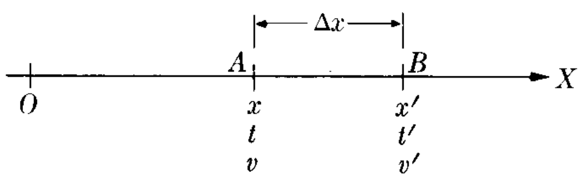


Figura 5-3

$$\bar{v} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{5.1}$$

donde $\Delta x = x' - x$ es el desplazamiento de la partícula y $\Delta t = t' - t$ es el tiempo transcurrido. Por consiguiente *la velocidad promedio durante un cierto intervalo de tiempo es igual al desplazamiento promedio por unidad de tiempo.* Para determinar la *velocidad instantánea* en un punto, tal como A, debemos hacer el intervalo de tiempo Δt tan pequeño como sea posible, de modo que esencialmente no ocurran cambios en el estado de movimiento durante ese pequeño intervalo. En el lenguaje matemático esto es equivalente a calcular el valor límite de la fracción que aparece en la ec. (5.1) cuando el denominador Δt tiende a cero. Esto se escribe en la forma

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Pero ésta es la definición de la derivada de x con respecto al tiempo; esto es

$$v = \frac{dx}{dt}, \tag{5.2}$$

de modo que *obtenemos la velocidad instantánea calculando la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.* Operacionalmente la velocidad instantánea se encuentra observando al cuerpo en movimiento en dos posiciones muy cercanas separadas por una pequeña distancia dx y midiendo el intervalo de tiempo dt necesario para que vaya de una posición a la otra. En el futuro el término "velocidad" se referirá siempre a la velocidad instantánea.

Si conocemos $v = f(t)$, podemos obtener la posición x integrando la ec. (5.2). De la ec. (5.2) tenemos $dx = v\,dt$; luego, integrando, obtenemos

$$\int_{x0}^{x} dx = \int_{t0}^{t} v\,dt,$$

donde x_0 es el valor de x en el tiempo t_0. Y, puesto que $\int_{x0}^{x} dx = x - x_0$

$$x = x_0 + \int_{t0}^{t} v\,dt. \tag{5.3}$$

Para entender el significado físico de la ec. (5.3), el estudiante debe tener en cuenta que $v\,dt$ representa el desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo dt. Luego, dividiendo el intervalo de tiempo $t - t_0$ en intervalos pequeños sucesivos dt_1, dt_2, dt_3, ..., encontramos que los desplazamientos correspondientes son $v_1\,dt_1$, $v_2\,dt_2$, $v_3\,dt_3$, ..., y el desplazamiento total entre t_0 y t es la suma de todos éstos. Debe notarse que v_1, v_2, v_3, ... son los valores de la velocidad en cada intervalo de tiempo. Entonces, de acuerdo al significado de una integral definida,

$$\begin{aligned}\text{Desplazamiento} &= x - x_0 = v_1\,dt_1 + v_2\,dt_2 + v_3\,dt_3 + \ldots = \\ &= \sum_i v_i\,dt_i = \int_{t0}^{t} v\,dt.\end{aligned}$$

Debemos observar que el desplazamiento Δx (o dx) puede ser positivo o negativo dependiendo de si el movimiento de la partícula es hacia la derecha o hacia la izquierda, dando por resultado un signo positivo o negativo para la velocidad. Así el signo de la velocidad en movimiento rectilíneo indica la dirección del movimiento. La dirección es la de $+OX$ si la velocidad es positiva, y la de $-OX$ si es negativa.

Algunas veces se utiliza el concepto de *velocidad*, definida como distancia/tiempo. Siempre es positiva, y es numéricamente igual a la magnitud de la velocidad; es decir, velocidad $= |v|$. Sin embargo, en general, la velocidad promedio usando esta definición no tiene el mismo valor que la velocidad promedio de la expresión 5.1. También es importante no confundir el "desplazamiento" $x - x_0$ en el tiempo $t - t_0$ con la "distancia" cubierta en el mismo tiempo. El desplazamiento se calcula con la ec. (5.3), pero la distancia se obtiene mediante la integral $\int_{t0}^{t} |v|\,dt$. Por ejemplo, al ir de la ciudad A a la ciudad B, que se encuentra a 100 millas al este de A, un conductor puede ir primero a la ciudad C, que se encuentra a 50 millas al oeste de A, y luego regresar e ir a B. La distancia cubierta ha sido de 200 millas, pero el desplazamiento de 100 millas. Si el movimiento tiene lugar en 4 horas la velocidad absoluta promedio es de 200 mi/4 hr $=$ 50 mi hr^{-1}, y la velocidad vectorial promedio es de 100 mi/4 hr $=$ 25 mi hr^{-1}.

En el sistema de unidades MKSC, la velocidad se expresa en metros por segundo, o ms^{-1}, siendo ésta la velocidad de un cuerpo que se desplaza un metro en un segundo con velocidad constante. Evidentemente, la velocidad puede expresarse con una combinación cualquiera de unidades de espacio y tiempo; tales como millas por hora, pies por minuto, etc.

EJEMPLO 5.1. Una partícula se mueve a lo largo del eje X de manera que su posición en cualquier instante t está dado por $x = 5t^2 + 1$, donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcular su velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre (a) 2 s y 3 s, (b) 2 s y 2,1 s, (c) 2 s y 2,001 s, (d) 2 s y 2,00001 s. Calcular también (e) la velocidad instantánea a los 2 s.

Solución: Haremos $t_0 = 2$ s, el cual es común para todo el problema. Usando $x = 5t^2 + 1$, tenemos $x_0 = 5(2)^2 + 1 = 21$ m. Entonces, para cada caso, $\Delta x = x - x_0$, $x - 21$ y $\Delta t = t - t_0 = t - 2$.

(a) Para $t = 3$ s, tenemos $\Delta t = 1$ s, $x = 5(3)^2 + 1 = 46$ m, y $\Delta x = 46 \text{ m} - 21 \text{ m} = 25$ m. Por lo tanto:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) Para $t = 2{,}1$ s, tenemos $\Delta t = 0{,}1$ s, $x = 5(2{,}1)^2 + 1 = 23{,}05$ m, y $\Delta x = 2{,}05$ m. Por lo tanto:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2{,}05 \text{ m}}{0{,}1 \text{ s}} = 20{,}5 \text{ m s}^{-1}.$$

(c) Para $t = 2{,}001$ s, tenemos $\Delta t = 0{,}001$ s, $x = 5(2{,}001)^2 + 1 = 21{,}020005$ m, y $\Delta x = 0{,}020005$ m. Por consiguiente:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}020005 \text{ m}}{0{,}001 \text{ s}} = 20{,}005 \text{ m s}^{-1}$$

(d) El estudiante puede verificar que para $t = 2{,}00001$ s, $\bar{v} = 20{,}00005 \text{ m s}^{-1}$.

(e) Notamos que a medida que Δt se torna más pequeño, la velocidad se aproxima a 20 m s^{-1}. Luego podemos esperar que éste sea el valor de la velocidad instantánea cuando $t = 2$ s. Ciertamente:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 1) = 10t.$$

Cuando $t = 2$, obtenemos $v = 20 \text{ m s}^{-1}$ que es la respuesta a la pregunta (e).

5.3 *Movimiento rectilíneo: aceleración*

En general, la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo. Si la velocidad permanece constante, se dice que el movimiento es *uniforme*. Refiriéndonos nuevamente a la Fig. 5-3, supongamos que en el tiempo t el objeto se encuentra en A con una velocidad v y en el tiempo t' en B con una velocidad v'. La *aceleración promedio* entre A y B está definida por

$$\bar{a} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{5.4}$$

donde $\Delta v = v' - v$ es el cambio en la velocidad y, como antes, $\Delta t = t' - t$ es el tiempo transcurrido. Luego *la aceleración promedio durante un cierto intervalo de tiempo es el cambio en la velocidad por unidad de tiempo durante el intervalo de tiempo.*

La *aceleración instantánea* es el valor límite de la aceleración promedio cuando el intervalo Δt es muy pequeño. Esto es,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

ó

$$a = \frac{dv}{dt}, \tag{5.5}$$

de modo que obtenemos la aceleración instantánea calculando la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Operacionalmente, se encuentra la aceleración instantánea observando el pequeño cambio de la velocidad dv que tiene lugar en el intervalo muy pequeño de tiempo, dt. En el futuro, cuando digamos "aceleración", nos estaremos refiriendo a la aceleración instantánea.

En general, la aceleración varía durante el movimiento. Si el movimiento rectilíneo tiene una aceleración constante, se dice que el movimiento es *uniformemente acelerado.*

Si la velocidad aumenta en valor absoluto con el tiempo, se dice que el movimiento es "acelerado"; pero si la velocidad disminuye en valor absoluto con el tiempo, el movimiento se denomina "retardado".

Si conocemos la aceleración, podemos calcular la velocidad integrando la ec. (5.5). De la ec. (5.5) tenemos $dv = a\,dt$, e, integrando, obtenemos

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt,$$

donde v_0 es la velocidad en el tiempo t_0. Luego, como $\int_{v_0}^{v} dv = v - v_0$,

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt. \tag{5.6}$$

Como en el caso del desplazamiento, el significado físico de la ec. (5.6) es fácilmente comprensible. Sabemos que $a\,dt$ nos da el cambio en la velocidad durante un intervalo de tiempo dt. Luego, dividiendo el intervalo $t - t_0$ en pequeños intervalos sucesivos de tiempo $dt_1, dt_2, dt_3, \ldots$, encontramos que los cambios correspondientes en la velocidad son $a_1\,dt_1, a_2\,dt_2, a_3\,dt_3, \ldots$, donde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son los valores de la aceleración en cada intervalo de tiempo, y el cambio total $v - v_0$ de la velocidad entre t_0 y t es la suma de éstos. Esto es,

$$\begin{aligned}\text{Cambio en la velocidad} = v - v_0 &= a_1\,dt_1 + a_2\,dt_2 + a_3\,dt_3 + \ldots \\ &= \sum_i a_i\,dt_i = \int_{t_0}^{t} a\,dt.\end{aligned}$$

La aceleración se relaciona también con la posición combinando las ecs. (5.2) y (5.5). Esto es,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

ó

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5.7}$$

Otra relación importante entre la posición y la velocidad puede obtenerse de la siguiente manera. A partir de la ec. (5.5) escribimos $dv = a\,dt$. Cuando multiplicamos el lado izquierdo de esta ecuación por el lado izquierdo de la ec. (5.2) y hacemos lo mismo con los lados derechos, obtenemos

$$v\,dv = a\,dt\left(\frac{dx}{dt}\right) = a\,dx.$$

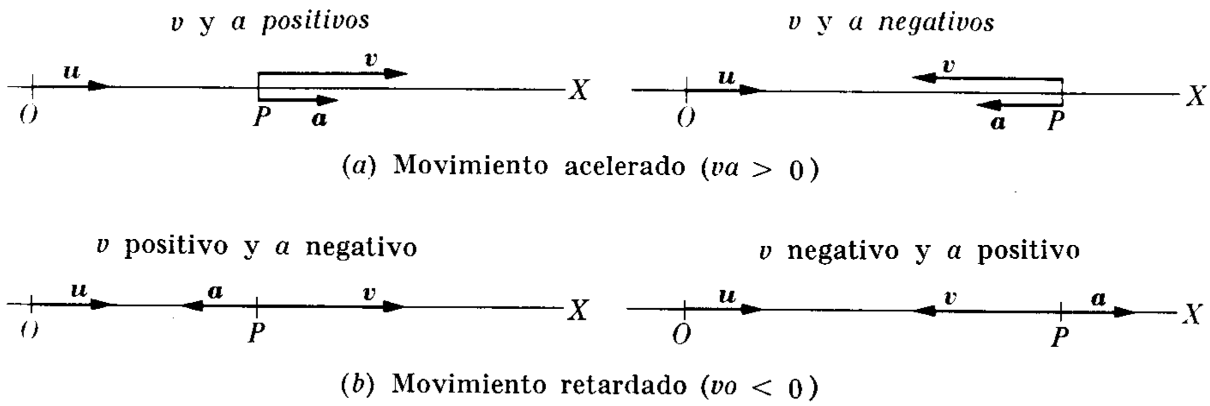


Fig. 5-4. Relación vectorial entre la velocidad y la aceleración en el movimiento rectilíneo.

Integrando, obtenemos

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

ó

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\,dx. \tag{5.8}$$

Esta ecuación es particularmente útil para calcular la velocidad cuando la relación entre x y a es conocida, de modo que la integral puede evaluarse.

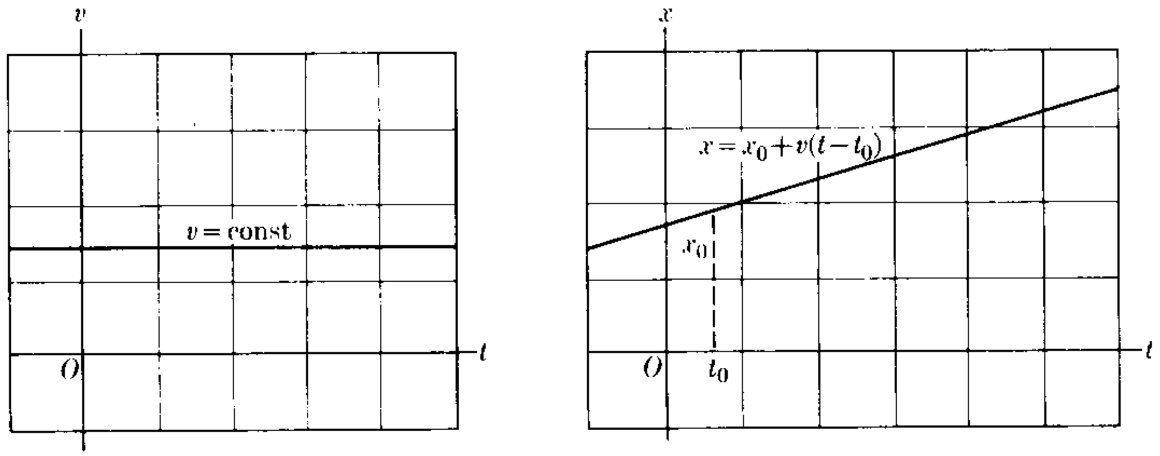
En el sistema MKSC, la aceleración se expresa en metros por segundo, o $(\mathrm{m/s})/\mathrm{s} = \mathrm{m\ s^{-2}}$, siendo ésta la aceleración de un cuerpo cuya velocidad aumenta un metro por segundo en cada segundo, con aceleración constante. Sin embargo, la aceleración puede también expresarse en otras unidades, tal como (mi/hr)/s.

5.4 *Representación vectorial de la velocidad y la aceleración en el movimiento rectilíneo*

La velocidad en el movimiento rectilíneo se representa por un vector cuya longitud está dada por la ec. (5.2) y cuya dirección coincide con la del movimiento (Fig. 5-4). La aceleración está también representada por un vector de magnitud dada por la ec. (5.5) y en la dirección OX o en la dirección opuesta, dependiendo ello de si es positiva o negativa. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario en la dirección positiva del eje de las X, podemos escribir en forma vectorial

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}v = \boldsymbol{u}\frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}\frac{dv}{dt}.$$

Los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ están dirigidos en la dirección de $\boldsymbol{u}$ o en la dirección opuesta, dependiendo de los signos de dx/dt y dv/dt, respectivamente. El movimiento es acelerado o retardado según que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ tengan la misma dirección o direcciones opuestas (Fig. 5-4). Una regla simple es la siguiente: si v y a tienen el mismo signo, el movimiento es acelerado; si los signos son opuestos, el movimiento es retardado.



(a) Gráfico de la velocidad (b) Gráfico del desplazamiento

Fig. 5-5. Gráficos de la velocidad y el desplazamiento en el movimiento uniforme.

EJEMPLO 5.2. Movimiento rectilíneo uniforme.

Solución: En este caso v es constante. Entonces $a = dv/dt = 0$; esto es, no hay aceleración. De la ec. (5.3), cuando v es constante, tenemos:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0).$$

En la Fig. 5-5 (a), representamos v en función de t. En la Fig. 5-5-b, representamos x en función de t.

EJEMPLO 5.3. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Solución: En este caso a es constante. Por lo tanto, de la ec. (5.6) tenemos

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a(t - t_0), \tag{5.10}$$

y de la ec. (5.3), tenemos

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\, dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\, dt,$$

ó

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2.] \tag{5.11}$$

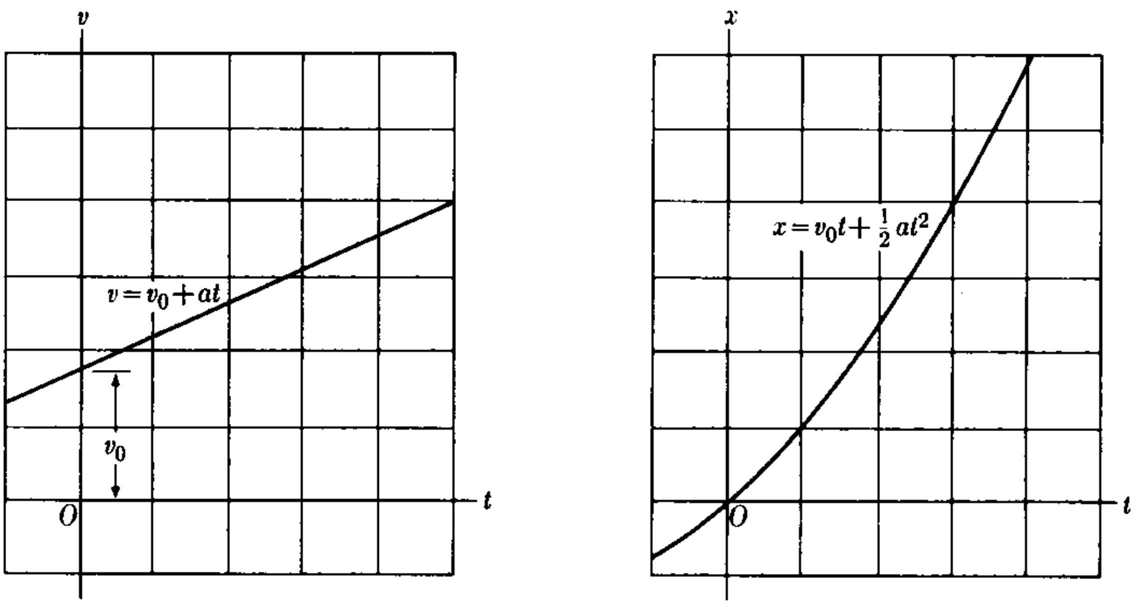
Es también útil obtener una relación a partir de la ec. (5.8),

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = a \int_{x_0}^{v} dx = a(x - x_0).$$

Luego

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{5.12}$$

El caso más importante de movimiento uniformemente acelerado es el de caída libre bajo la acción de la gravedad. En este caso, tomando la dirección vertical hacia arriba como positiva, definimos $a = -g$, tomando el signo menos debido al hecho de que la aceleración de la gravedad es hacia abajo. El valor de g varía de un lugar



(a) Gráfico de la velocidad (b) Gráfico del desplazamiento

Fig. 5-6. Gráficos de la velocidad y el desplazamiento en el movimiento uniformemente acelerado.

a otro de la superficie terrestre, pero es siempre muy cercano a $g = 9{,}8$ m s^{-2} = 32,2 ft s^{-2}. Este valor es el mismo para todos los cuerpos, y puede considerarse independiente de la altura, mientras no nos alejemos de la superficie terrestre, ya que la aceleración de la gravedad disminuye a medida que la distancia sobre la superficie terrestre o bajo ella aumenta (capítulo 13).

Podemos representar v y x en función del tiempo. Cuando por simplicidad establecemos $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$, la ec. (5.10) se simplifica a $v = v_0 + at$ y la ec. (5.11) es $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$. Ambas ecuaciones han sido representadas en la Fig. 5.6. Gráficos de esta clase son muy útiles para analizar todos los tipos de movimiento.

EJEMPLO 5.4. Un cuerpo se mueve a lo largo del eje X de acuerdo a la ley

$$x = 2t^3 + 5t^2 + 5,$$

donde x se expresa en pies y t en segundos. Encontrar (a) la velocidad y la aceleración en cualquier momento, (b) la posición, velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s y 3 s, y (c) la velocidad promedio y la aceleración promedio entre $t = 2$ s y $t = 3$ s.

Solución: (a) Usando las ecs. (5.2) y (5.5), podemos escribir

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 5t^2 + 5) = 6t^2 + 10t \text{ pies s}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 10t) = 12t + 10 \text{ pies s}^{-2}.$$

(b) Para $t = 2$ s, usando las expresiones respectivas, obtenemos

$$x = 41 \text{ pies}, \qquad v = 44 \text{ pies s}^{-1}, \qquad a = 34 \text{ pies s}^{-2}.$$

Similarmente, para $t = 3$ s, el estudiante puede verificar que

$$x = 104 \text{ pies}, \qquad v = 84 \text{ pies s}^{-1}, \qquad a = 46 \text{ pies }^{-2}.$$

(c) Para encontrar la velocidad promedio entre $t = 2$ s y $t = 3$ s, tenemos $\Delta t =$ 1 s, y de (b) $\Delta x = 63$ pies, $\Delta v = 40$ pies s^{-1}. Luego

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{63 \text{ pies}}{1 \text{ s}} = 63 \text{ pies s}^{-1},$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40 \text{ pies s}^{-1}}{1 \text{ s}} = 40 \text{ pies s}^{-2}.$$

EJEMPLO 5.5. La aceleración de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje X es $a = (4x - 2)$ m s^{-2}, donde x se expresa en metros. Suponiendo que $v_0 = 10$ m s^{-1} cuando $x_0 = 0$ m, encontrar la velocidad en cualquier otra posición.

Solución: Como en este ejemplo la aceleración está expresada en función de la posición y no en función del tiempo, no podemos usar la definición $a = dv/dt$ para obtener la velocidad por integración. En su lugar debemos utilizar la ec. (5.8), con $v_0 =$ 10 m s^{-1} y $x_0 = 0$. Así

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}(10)^2 = \int_0^x (4x - 2)\, dx$$

ó

$$v^2 = 100 + 2(2x^2 - 2x)_0^x = 4x^2 - 4x + 100$$

y por consiguiente

$$v = \sqrt{4x^2 - 4x + 100}.$$

¿Deberíamos colocar los signos $\pm$ delante del radical? Si así lo hiciéramos, ¿cuál sería su significado? Sugerimos que el estudiante haga un gráfico de la velocidad v en función de la posición x.

Dejamos como ejercicio para que el estudiante encuentre x en función del tiempo t usando la definición $v = dx/dt$, y de aquel resultado obtenga v y a en función del tiempo. Para obtener $x(t)$, puede ser necesario usar una tabla de integrales.

EJEMPLO 5.6. Se lanza un cuerpo hacia arriba en dirección vertical con una velocidad de 98 m s^{-1} desde el techo de un edificio de 100 m de altura. Encontrar (a) la máxima altura que alcanza sobre el suelo, (b) el tiempo necesario para alcanzarla, (c) la velocidad al llegar al suelo, y (d) el tiempo total transcurrido hasta que el cuerpo llega al suelo.

Solución: Refiriéndonos a la Fig. 5.7 y usando las ecs. (5.10) y (5.11), con $t_0 = 0$, $v_0 = 98$ m s^{-1}, $x_0 = x_A = 100$ m (el origen de coordenadas C se ha situado en el piso) y $a = -g = -9{,}8$ m s^{-2}, tenemos para cualquier tiempo t,

$$v = 98 - 9{,}8t,$$
$$x = 100 + 98t - 4{,}9t^2.$$

En el punto de máxima altura $v = 0$. Luego $98 - 9{,}8t = 0$, ó $t = 10$ s. Reemplazando este valor en la expresión de x, obtenemos

$$x_B = 100 + 98(10) - 4{,}9(10)^2$$
$$= 590 \text{ m}.$$

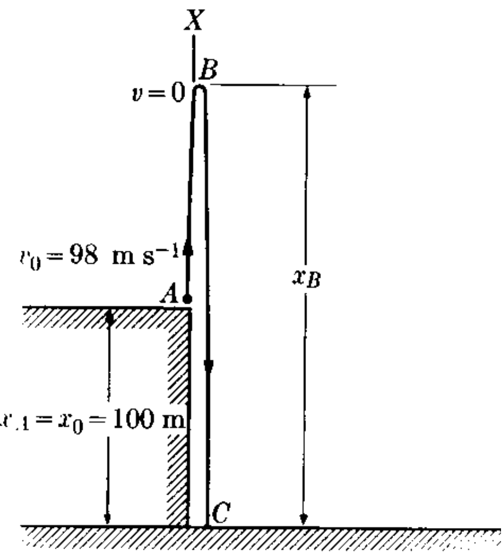


Figura 5-7

Para obtener el tiempo necesario para que el cuerpo llegue al suelo (esto es, al punto C), ponemos $x_C = 0$, siendo C nuestro origen de coordenadas. Luego

$$0 = 100 + 98t - 4{,}9t^2.$$

Esta es una ecuación de segundo grado en t, cuyas raíces son:

$$t = -0{,}96 \text{ s} \quad \text{y} \quad t = 20{,}96 \text{ s}.$$

La respuesta negativa corresponde a un tiempo previo al del disparo ($t = 0$) y debe descartarse, ya que no tiene significado físico en este problema (puede tenerlo en otros). Para obtener la velocidad en C, introducimos el valor $t = 20{,}96$ s en la expresión de v_C, obteniéndose

$$v_C = 98 - 9{,}8(20{,}96) = -107{,}41 \text{ m s}^{-1}.$$

El signo negativo significa que el cuerpo se desplaza hacia abajo. Se sugiere que el estudiante verifique los resultados para x_B y v_C utilizando la ec. (5.12), la cual para este problema es

$$v^2 = 9604 - 19{,}6(x - 100).$$

También el estudiante debería resolver el problema colocando el origen en A. En dicho caso

$$x_0 = x_A = 0 \text{ y } x_C = -100 \text{ m}.$$

EJEMPLO 5.7. Una partícula se desplaza a lo largo del eje X de acuerdo a la ley $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$. ¿Durante qué intervalos de tiempo la partícula se está moviendo en la dirección positiva del eje X y durante qué intervalos se está moviendo en la dirección negativa del eje X? ¿Durante qué intervalos de tiempo es el movimiento acelerado y durante cuáles otros es retardado? Hacer un gráfico de x, v y a en función del tiempo.

Solución: Aplicando la ec. (5.2), podemos encontrar que la velocidad de la partícula en cualquier instante t es $v = dx/dt = 3t^2 - 6t - 9$. La velocidad puede escribirse también $v = 3(t + 1)(t - 3)$. Usando la ec. (5.5), podemos encontrar que la aceleración es $a = 6t - 6 = 6(t - 1)$. Los gráficos de x, v y a en función del tiempo se muestran en la Fig. 5-8. Notemos que, para $t < -1$, la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección positiva del eje X. Para $t = -1$, $x = 10$, la velocidad es cero. Para $-1 < t < 3$, la velocidad es negativa y el movimiento se invierte, desplazándose la partícula en la dirección negativa del eje X. Cuando $t = 3$, $x =$

— 22 la velocidad es otra vez cero. Para $t > 3$, la velocidad vuelve a ser positiva y el movimiento se invierte, moviéndose la partícula en la dirección positiva del eje X. Las posiciones de la partícula se muestran en la Fig. 5-8(a); los puntos de cambio, donde la velocidad es cero se marcan con A y B.

Observando los gráficos de la velocidad y de la aceleración, vemos que para $t < -1$ el movimiento es retardado (la magnitud de v disminuye; v y a tienen signos opuestos). Para $-1 < t < 1$, el movimiento es acelerado; para $1 < t < 3$, el movimiento es nuevamente retardado; finalmente para $t > 3$, es acelerado.

Este ejemplo ilustra cuan útiles son los gráficos de x, v y a en función del tiempo para conocer las características del movimiento.

5.5 *Movimiento curvilíneo: velocidad*

Consideremos ahora una partícula que describe una trayectoria curvilínea P, como la ilustrada en la Fig. 5-9. En el tiempo t la partícula se encuentra en el punto A, estando su posición dada por el vector $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z$. Posteriormente en t', la partícula se encontrará en B, con $\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{u}_x x' + \boldsymbol{u}_y y' + \boldsymbol{u}_z z'$. Aunque la partícula se ha desplazado a lo largo del arco $AB = \Delta s$, el *desplazamiento*, que es un vector, es $\overrightarrow{AB} = \Delta \boldsymbol{r}$. Notar en la figura que $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}$, y por consiguiente

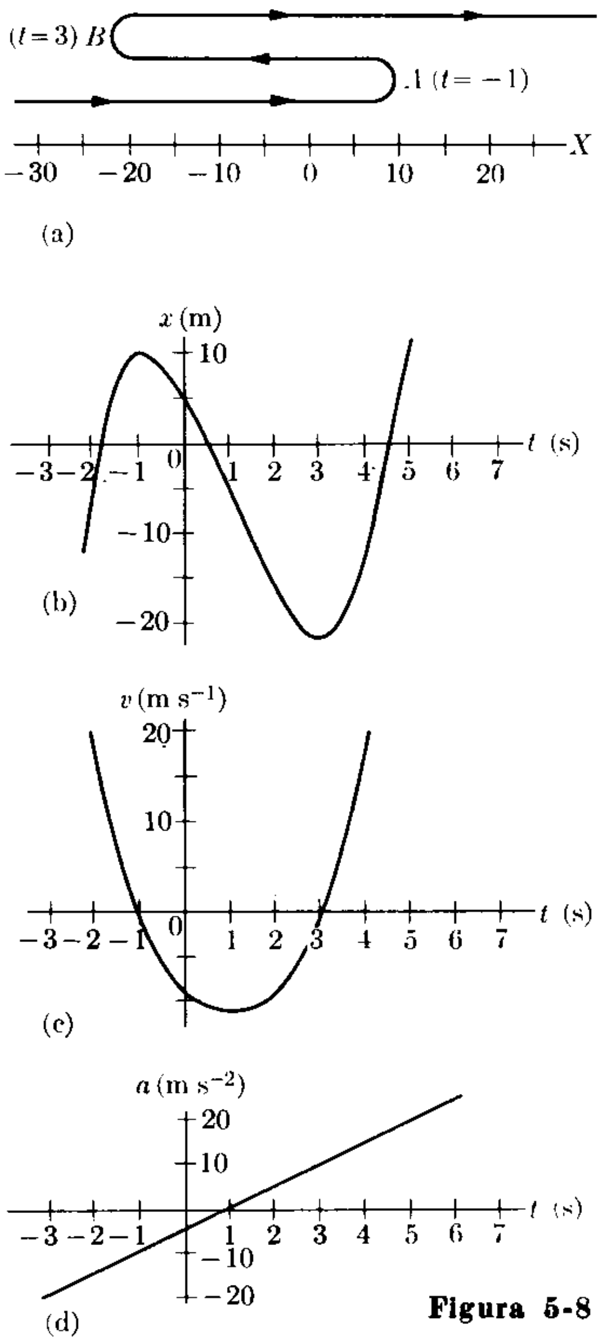


Figura 5-8

$$\overrightarrow{AB} = \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x(x' - x) + \boldsymbol{u}_y(y' - y) + \boldsymbol{u}_z(z' - z)$$
$$= \boldsymbol{u}_x(\Delta x) + \boldsymbol{u}_y(\Delta y) + \boldsymbol{u}_z(\Delta z), \quad (5.13)$$

donde $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$, y $\Delta z = z' - z$. La velocidad promedio, también es un vector, definido por

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \quad (5.14)$$

o, usando la ec. (5.13),

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + \boldsymbol{u}_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \boldsymbol{u}_z \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (5.15)$$

La velocidad promedio está representada por un vector paralelo al desplazamiento $\overrightarrow{AB} = \Delta \boldsymbol{r}$. Para calcular la velocidad instantánea debemos, como en casos previos, hacer Δt muy pequeño. Esto es,

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{5.16}$$

Ahora cuando Δt se aproxima a cero, el punto B se aproxima al punto A, como lo indican los puntos B', B'', ... en la Fig. 5-10. Durante este proceso el vector $\overrightarrow{AB} = \Delta \boldsymbol{r}$ cambia continuamente de magnitud y dirección, y de igual manera la velocidad promedio. En el límite cuando B está muy cerca de A, el vector $\overrightarrow{AB} = \Delta \boldsymbol{r}$ coincide con la dirección de la tangente AT. Por tanto, en el movimiento curvilíneo, la velocidad instantánea es un vector *tangente* a la trayectoria, y está dado por

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{5.17}$$

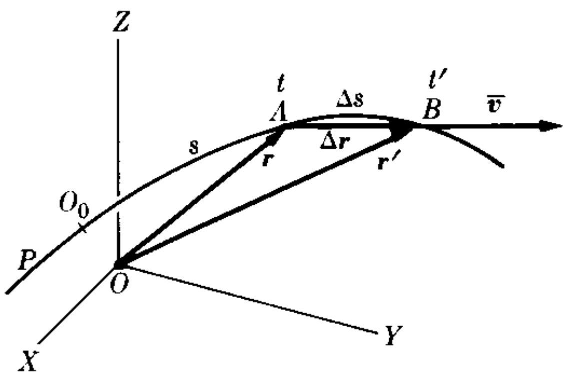


Fig. 5-9. Desplazamiento y velocidad promedio en el movimiento curvilíneo.

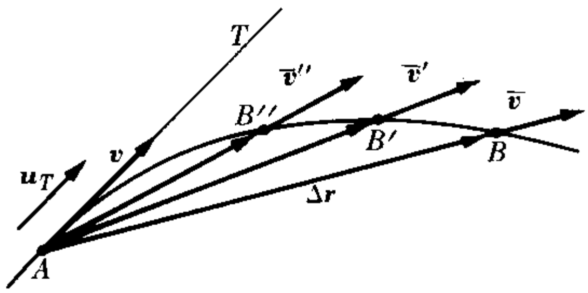


Fig. 5-10. La velocidad es tangente a la trayectoria en el movimiento curvilíneo.

O, si tenemos en cuenta la ec. (5.15), la velocidad es

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x \frac{dx}{dt} + \boldsymbol{u}_y \frac{dy}{dt} + \boldsymbol{u}_z \frac{dz}{dt}, \tag{5.18}$$

indicando que las componentes de la velocidad a lo largo de los ejes X-, Y-, y Z- son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{5.19}$$

y la magnitud de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{5.20}$$

Al pasar de la ec. (5.16) a la ec. (5.17), podemos proceder de una manera algo diferente. Sea O_0 (Fig. 5-9) un punto de referencia arbitrario en la trayectoria. Luego $s = O_0A$ da la posición de la partícula medida por el desplazamiento a lo *largo* de la trayectoria. Como en el caso rectilíneo, s puede ser positiva o negativa, dependiendo en qué lado de O_0 está la partícula. Cuando la partícula se mueve de A a B, el desplazamiento Δs a lo largo de la curva está dado por la longitud del arco AB. Multiplicando y dividiendo la ec. (5.16) por $\Delta s =$ arco AB, obtenemos

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right),$$

expresión en la cual indicamos en el primer factor que $\Delta s \to 0$ (ver Fig. 5-10). Ahora, de la Fig. 5.9 podemos ver que la magnitud de $\Delta \boldsymbol{r}$ es casi igual a la de Δs, y a medida que B se acerca a A, más se aproxima la magnitud de $\Delta \boldsymbol{r}$ a la de Δs. Por lo tanto el límite $_{\Delta s \to 0}\, \Delta \boldsymbol{r}/\Delta s$ representa un vector de magnitud unitaria y dirección tangente a la trayectoria. Esto es

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{u}_T. \tag{5.21}$$

Por otra parte,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{5.22}$$

Por lo tanto podemos escribir $\boldsymbol{v}$ en la forma

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_T \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{u}_T v, \tag{5.23}$$

donde $ds/dt = v$ nos da el valor de la velocidad, y el vector unitario $\boldsymbol{u}_T$ la dirección. El hecho de que $v = ds/dt$ es el valor de la velocidad está de acuerdo con nuestra definición previa de velocidad en la ec. (5.2), ya que ahora ds es el desplazamiento a lo largo de la trayectoria curvilínea en el tiempo dt. De esta manera ds juega el mismo papel en el movimiento curvilíneo que dx en el movimiento rectilíneo. La única diferencia entre las ecs. (5.23) y (5.2) es la inclusión del elemento direccional, dado por el vector unitario tangente $\boldsymbol{u}_T$, introducido previamente en la sección 5.4.

5.6 *Movimiento curvilíneo: aceleración*

En el movimiento curvilíneo la velocidad, en general, cambia tanto en magnitud como en dirección. La magnitud de la velocidad cambia debido a que su valor aumenta o disminuye. La dirección de la velocidad cambia debido a que la velocidad es tangente a la trayectoria y ésta se curva continuamente. La Fig. 5-11 indica la velocidad en los tiempos t y t', cuando la partícula pasa por A y B respectivamente. El cambio vectorial en la velocidad al pasar de A a B está indicado por $\Delta \boldsymbol{v}$ en el triángulo vectorial; esto es, $\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$, por consiguiente $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$. Luego la aceleración promedio, en el intervalo Δt, está definida por

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}, \tag{5.24}$$

y es paralela a $\Delta \boldsymbol{v}$. Como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x v_x + \boldsymbol{u}_y v_y + \boldsymbol{u}_z v_z$, tenemos $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x \Delta v_x + \boldsymbol{u}_y \Delta v_y + \boldsymbol{u}_z \Delta v_z$ y

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{u}_x \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \boldsymbol{u}_y \frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \boldsymbol{u}_z \frac{\Delta v_z}{\Delta t}. \tag{5.25}$$

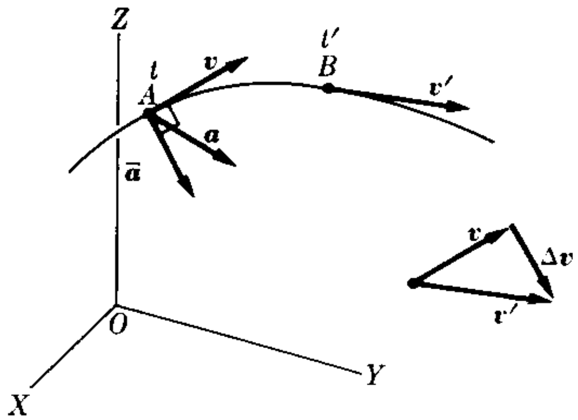


Fig. 5-11. Aceleración en el movimiento curvilíneo.

La aceleración instantánea, que en el futuro denominaremos simplemente por aceleración, está definida por:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

ó

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{5.26}$$

La aceleración es un vector que tiene la misma dirección que el cambio instantáneo en la velocidad. Como la velocidad cambia en la dirección en la cual la trayectoria se curva, la aceleración está siempre apuntando hacia la concavidad

Fig. 5-12. Relación vectorial entre la velocidad y la aceleración en el movimiento curvilíneo.

de la curva, y en general no es tangente ni perpendicular a la trayectoria, como se indica en la Fig. 5-12. Recordando la ec. (5.17), podemos escribir la ec. (5.26) en la forma

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{5.27}$$

De la ec. (5.25) observamos que

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \boldsymbol{u}_y \frac{dv_y}{dt} + \boldsymbol{u}_z \frac{dv_z}{dt}, \tag{5.28}$$

de modo que las componentes de la aceleración a lo largo de los ejes X-, Y-, Z son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \tag{5.29}$$

o, en virtud de la ec. (5.19) o la ec. (5.27),

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{5.30}$$

La magnitud de la aceleración es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{5.31}$$

En el movimiento curvilíneo usualmente conocemos la ecuación de la trayectoria; esto es, conocemos las coordenadas de las partículas en movimiento en función del tiempo. Estas coordenadas están dadas por las ecuaciones

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Aplicando las ecs. (5.19) y (5.29), podemos calcular la velocidad y la aceleración. En otros casos el problema es todo lo contrario: conocemos las componentes de la aceleración en función del tiempo; esto es,

$$a_x = a_x(t), \qquad a_y = a_y(t), \qquad a_z = a_z(t).$$

Entonces, usando la ec. (5.29) e integrando, obtenemos las componentes de la velocidad, e integrando la ec. (5.19) obtenemos las coordenadas en función del tiempo.

5.7 *Movimiento bajo aceleración constante*

El caso en el cual la aceleración es constante, tanto en magnitud como en dirección, es de especial importancia. Si $\boldsymbol{a}$ = constante, tenemos integrando la ec. (5.26)

$$\int_{v0}^{v} d\boldsymbol{v} = \int_{t0}^{t} \boldsymbol{a}\, dt = \boldsymbol{a} \int_{t0}^{t} dt = \boldsymbol{a}(t - t_0), \tag{5.32}$$

donde $\boldsymbol{v}_0$ es la velocidad para $t = t_0$. Luego, teniendo en cuenta que $\int_{v0}^{v} d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}(t - t_0) \tag{5.33}$$

nos da la velocidad en función del tiempo. Sustituyendo este resultado en la ec. (5.17), e integrando, obtenemos

$$\int_{r0}^{r} d\boldsymbol{r} = \int_{t0}^{t} [\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}(t - t_0)]\, dt = \boldsymbol{v}_0 \int_{t0}^{t} dt + \boldsymbol{a} \int_{t0}^{t} (t - t_0)\, dt,$$

donde $\boldsymbol{r}_0$ da la posición en el tiempo t_0. Por lo tanto

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}(t - t_0)^2, \tag{5.34}$$

nos da la posición de la partícula en cualquier instante. Estos resultados deben compararse con las ecs. (5.10) y (5.11) obtenidas para el movimiento rectilíneo con aceleración constante. En el movimiento rectilíneo, la velocidad y la aceleración tienen o la misma dirección o la opuesta. Sin embargo, en el caso más general que estamos discutiendo ahora, $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}$ pueden tener direcciones diferentes. Por lo tanto, la velocidad $\boldsymbol{v}$ dada por la ec. (5.33) no es paralela a $\boldsymbol{a}$, pero se encuentra siempre en el plano definido por $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}$. Igualmente, de la ec. (5.34), vemos que el extremo del vector $\boldsymbol{r}$ se encuentra siempre en el plano paralelo a $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a}$, y que pasa por el punto definido por $\boldsymbol{r}_0$. Llegamos a la conclusión, entonces, que el movimiento con aceleración constante se produce siempre en un plano. También la ec. (5.34) indica que la trayectoria del movimiento es una parábola (ver problema 3.33).

Uno de los usos más interesantes de estas ecuaciones es su aplicación al movimiento de un proyectil. En este caso $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} =$ aceleración de la gravedad. Escogeremos el plano XY coincidente con el plano definido por $\boldsymbol{v}_0$ y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$; el eje Y hacia arriba de modo que $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{u}_y g$, y el origen O coincidente con $\boldsymbol{r}_0$ (Fig. 5-13). Entonces

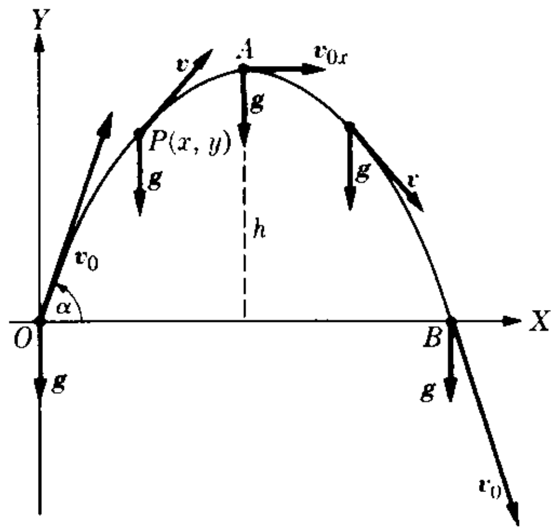


Fig. 5-13. Cuando la aceleración es constante la trayectoria es una parábola.

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{u}_x v_{0x} + \boldsymbol{u}_y v_{0y},$$

donde

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha. \tag{5.35}$$

La ec. (5.33) puede separarse en sus componentes (si $t_0 = 0$) escribiendo

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x v_x + \boldsymbol{u}_y v_y = (\boldsymbol{u}_x v_{0x} + \boldsymbol{u}_y v_{0y}) - \boldsymbol{u}_y g t$$

ó

$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = v_{0y} - gt, \tag{5.36}$$

que indica que la componente de $\boldsymbol{v}$ en la dirección X permanece constante, como debía, ya que no hay aceleración en dicha dirección. Similarmente, la ec. (5.34) con $\boldsymbol{r}_0 = 0$ y $t_0 = 0$, cuando se separa en sus componentes, se transforma

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x x \times \boldsymbol{u}_y y = (\boldsymbol{u}_x v_{0x} + \boldsymbol{u}_y v_{0y})t - \boldsymbol{u}_y \tfrac{1}{2} g t^2$$

ó

$$x = v_{0x} t, \qquad y = v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2, \tag{5.37}$$

que dan las coordenadas de la partícula en función del tiempo. El tiempo requerido para que el proyectil alcance la máxima altura A se encuentra haciendo $v_y = 0$ en la ec. (5.36) ya que, en aquel punto, la velocidad del proyectil es horizontal. Luego

$$t = \frac{v_{0y}}{g} \quad \text{ó} \quad t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}. \tag{5.38}$$

La máxima altura h se obtiene sustituyendo este valor de t en la segunda ecuación de (5.37), dando como resultado

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}. \tag{5.39}$$

El tiempo necesario para que el proyectil retorne al nivel del suelo en B, denominado *tiempo de vuelo*, puede obtenerse haciendo $y = 0$ en la ec. (5.37). El tiempo de vuelo es obviamente el doble del valor dado por las ecs. (5.38), o $2v_0 \operatorname{sen} \alpha/g$. El *alcance* $R = OB$ es la distancia horizontal cubierta, y se obtiene sustituyendo el valor del tiempo de vuelo en la primera ecuación de (5.37), resultando

$$R = v_{0x} \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$$

ó

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}. \tag{5.40}$$

Notar que el alcance es máximo para $\alpha = 45°$. La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando el tiempo t entre las dos ecs. (5.37), obteniéndose

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha, \tag{5.41}$$

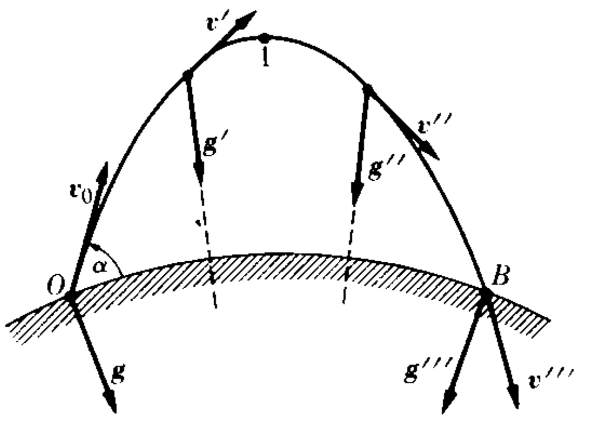


Fig. 5-14. La trayectoria de un proyectil de largo alcance no es una parábola, sino un arco de una elipse.

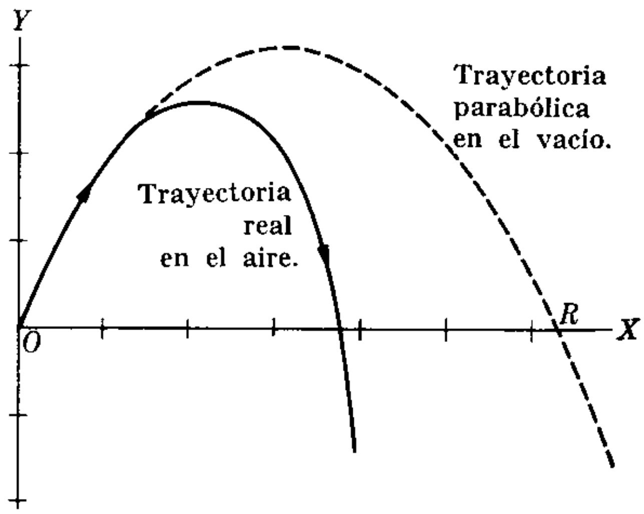


Fig. 5-15. Efecto de la resistencia del aire en el movimiento de un proyectil.

la cual es la ecuación de una parábola, ya que tanto tg α como el coeficiente de x^2 son constantes.

Los resultados que hemos obtenido son válidos cuando: (1) El alcance es suficientemente pequeño como para despreciar la curvatura de la tierra. (2) La altura es suficientemente pequeña como para despreciar la variación de la gravedad con la altura. (3) La velocidad inicial del proyectil es suficientemente pequeña para despreciar la resistencia del aire. Para un proyectil de largo alcance, tal como un ICBM, la situación se muestra en la Fig. 5-14 donde todos los vectores g señalan hacia el centro de la tierra y varían con la altura. La trayectoria es, en este caso, un arco de elipse, como se estudiará en el capítulo 13. Si tenemos en cuenta la resistencia del aire, la trayectoria deja de ser parabólica, como se muestra en la Fig. 5-15 y el alcance disminuye.

EJEMPLO 5.8. Un cañón dispara una bala con una velocidad de 200 m s^{-1} haciendo un ángulo de 40° con el terreno. Encontrar la velocidad y la posición de la bala después de 20 s. Encontrar también el alcance y el tiempo necesario para que la bala retorne a tierra.

Solución: De la Fig. 5-16, notando que $v_0 = 200$ m s^{-1} y $\alpha = 40°$, tenemos que $v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 153{,}2$ m s^{-1} y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 128{,}6$ m s^{-1}. De este modo las componentes de la velocidad en cualquier instante están dadas por $v_x = 153{,}2$ m s^{-1} y $v_y = 128{,}6 - 9{,}8t$ m s^{-1}, y las coordenadas de la bala son

$$x = 153{,}2t \text{ m}, \qquad y = 128{,}6t - 4{,}9t^2 \text{ m}.$$

Para $t = 20$ s, tenemos simplemente $v_x = 153{,}2$ m s^{-1} y $v_y = -67{,}4$ m s^{-1}. El hecho de que v_y sea negativo significa que la bala está descendiendo. La velocidad es $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 167{,}4$ m s^{-1}. Similarmente la posición de P está dada por $x = 3064$ m e $y = 612$ m. El estudiante debe verificar que la altura de A es 843,7 m, que el alcance $R = OB$ es de 4021 m, y que el tiempo necesario para ir de O a B es de 26,24 s.

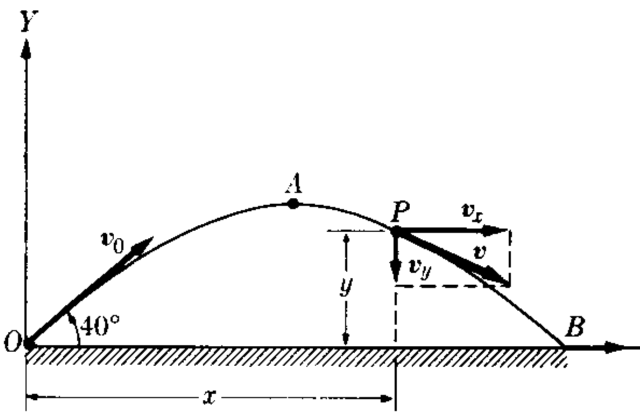


Fig. 5.16. Velocidad en el movimiento de un proyectil.

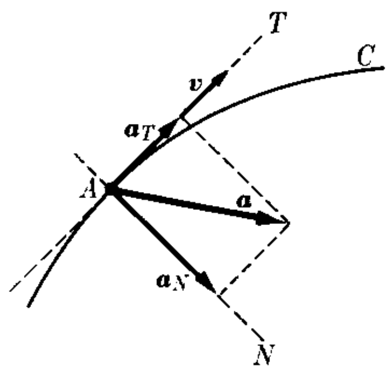


Fig. 5-17. Aceleraciones tangencial y normal en el movimiento curvilíneo.

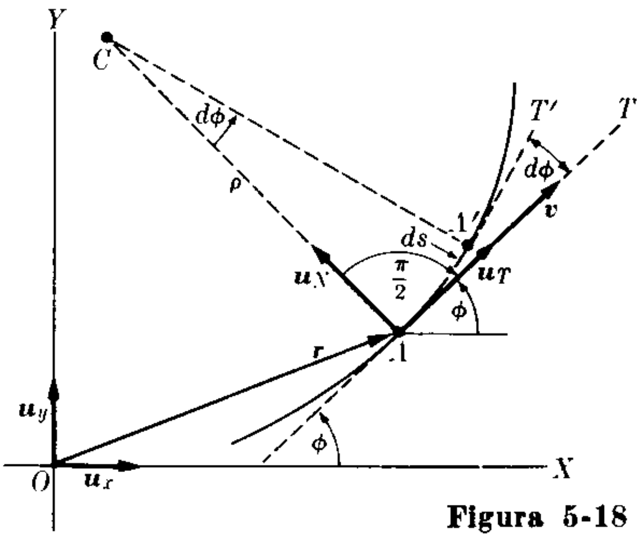


Figura 5-18

5.8 *Componentes tangencial y normal de la aceleración*

Consideremos una partícula que describe una trayectoria curva (Fig. 5-17). Por simplicidad supondremos que la curva es plana pero los resultados que obtengamos serán válidos para el movimiento a lo largo de cualquier curva. En el tiempo t la partícula se encuentra en A con la velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$. Considerando que la aceleración $\boldsymbol{a}$ está dirigida hacia el lado cóncavo de la trayectoria, podemos descomponerla en una componente tangencial $\boldsymbol{a}_T$ — paralela a la tangente AT y llamada *aceleración tangencial* — y una componente normal $\boldsymbol{a}_N$ — paralela a la normal AN y denominada *aceleración normal*. Cada una de estas componentes tiene un significado físico bien definido. Cuando la partícula se mueve, la magnitud de la velocidad puede cambiar, y este cambio está relacionado con la aceleración tangencial. También la dirección de la velocidad cambia y este cambio está relacionado con la aceleración normal. Esto es:

Cambio en magnitud de la velocidad: aceleración tangencial.

Cambio en la dirección de la velocidad: aceleración normal.

Tracemos en A (Fig. 5-18) un vector unitario $\boldsymbol{u}_T$ tangente a la curva. La velocidad, de acuerdo a la ec. (5.23), está expresada como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_T v$. Así la aceleración será

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_T v) = \boldsymbol{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}_T}{dt} v.$$

Si la trayectoria fuera una recta, el vector $\boldsymbol{u}_T$ sería constante en magnitud y dirección y $d\boldsymbol{u}_T/dt = 0$. Pero cuando la trayectoria es curva, la *dirección* de $\boldsymbol{u}_T$ varía a lo largo de la curva, dando un valor diferente de cero para $d\boldsymbol{u}_T/dt$. Para proseguir debemos calcular $d\boldsymbol{u}_T/dt$. Introduzcamos el vector unitario $\boldsymbol{u}_N$, normal a la curva y dirigido hacia el lado cóncavo. Sea ϕ el ángulo que hace la tengente a la curva en A con el eje X, podemos escribir, usando la ec. (3.9),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_T &= \boldsymbol{u}_x \cos\phi + \boldsymbol{u}_y \operatorname{sen}\phi,\\ \boldsymbol{u}_N &= \boldsymbol{u}_x \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{u}_y \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\boldsymbol{u}_x \operatorname{sen}\phi + \boldsymbol{u}_y \cos\phi.\end{aligned}$$

Así

$$\frac{d\boldsymbol{u}_T}{dt} = -\boldsymbol{u}_x \operatorname{sen}\phi \frac{d\phi}{dt} + \boldsymbol{u}_y \cos\phi \frac{d\phi}{dt} = \boldsymbol{u}_N \frac{d\phi}{dt}.$$

Esto indica que $d\boldsymbol{u}_T/dt$ es normal a la curva. Ahora

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds},$$

donde $ds = AA'$ es el pequeño arco a lo largo del cual se mueve la partícula en el tiempo dt. Las normales a la curva en A y A' se intersectan en el punto C, llamado el *centro de curvatura*. Denominando $\rho = CA$ al *radio de curvatura* y usando la ec. (2.4), podemos escribir $ds = \rho\, d\phi$ o $d\phi/ds = 1/\rho$. Así $d\phi/dt = v/\rho$ y

$$\frac{d\boldsymbol{u}_T}{dt} = \boldsymbol{u}_N \frac{v}{\rho}. \tag{5.42}$$

Introduciendo este resultado en la expresión de $d\boldsymbol{v}/dt$, obtenemos finalmente

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_T \frac{dv}{dt} + \boldsymbol{u}_N \frac{v^2}{\rho}. \tag{5.43}$$

El primer término $[\boldsymbol{u}_T(dv/dt)]$ es un vector tangente a la curva, y es proporcional al cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad; corresponde a la aceleración tangencial $\boldsymbol{a}_T$. El segundo término $[\boldsymbol{u}_N(v^2/\rho)]$ es un vector normal a la curva, y corresponde a la aceleración normal $\boldsymbol{a}_N$. Está asociado con el cambio en la dirección ya que corresponde a $d\boldsymbol{u}_T/dt$. Con respecto a las magnitudes, podemos escribir

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = \frac{v^2}{\rho}. \tag{5.44}$$

La magnitud de la aceleración del punto A es entonces

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^4/\rho^2)}.$$

Si el movimiento curvilíneo es uniforme (esto es, si la magnitud de la velocidad permanece constante), $v =$ constante, de modo que $a_T = 0$, y no hay aceleración tangencial. Por otro lado, si el movimiento es rectilíneo (esto es, si la dirección de la velocidad no cambia), el radio de curvatura es infinito ($\rho = \infty$), de modo que $a_N = 0$ y no hay aceleración normal. Debe señalarse que los resultados que hemos obtenido son válidos tanto para movimientos en un plano como para movimientos en el espacio.

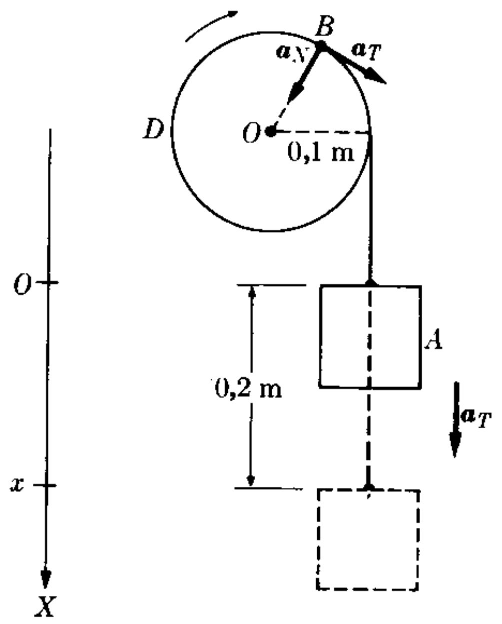
EJEMPLO 5.9. Un disco D (Fig. 5-19) está rotando libremente alrededor de su eje horizontal. Una cuerda está enrollada alrededor de la circunferencia exterior del disco, y un cuerpo A, unido a la cuerda, cae bajo la acción de la gravedad. El movimiento de A es uniformemente acelerado, pero, como se verá en el capítulo 10, su aceleración es menor que aquélla debida a la gravedad. Cuando $t = 0$, la velocidad del cuerpo A es de 0,04 m s^{-1}, y dos segundos más tarde A ha caído 0,2 m. Encontrar las aceleraciones tangencial y normal, en cualquier instante, de un punto cualquiera del borde del disco.

Solución: Considerando que el origen de coordenadas se encuentra en la posición $t = 0$, la ecuación del movimiento uniformemente acelerado de A es $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Pero sabemos que $v_0 = 0{,}04$ m s^{-1}. Así

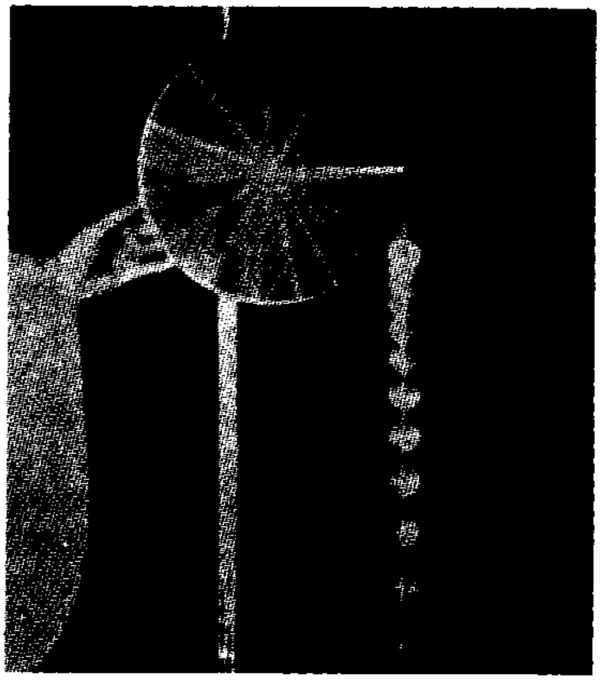
$$x = 0{,}04t + \tfrac{1}{2}at^2 \text{ m}.$$

Con $t = 2$ s, debemos tener $x = 0{,}2$ m. Así $a = 0{,}06$ m s^{-2}. Esto es

$$x = 0{,}04t + 0{,}03t^2 \text{ m}.$$



(a)



(b)

Fig. 5-19. La fotografía de destello múltiple en (b) muestra que la masa cae con movimiento uniformemente acelerado. (Verificar esto tomando medidas de la fotografía).

Por consiguiente, la velocidad de A es

$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}04 + 0{,}06t \text{ m s}^{-1}.$$

Esta ecuación da también la velocidad de cualquier punto B situado sobre el borde del disco. La aceleración tangencial de B es por lo tanto igual que la aceleración de A,

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0{,}06 \text{ m s}^{-2},$$

mientras que, como $\rho = 0{,}1$ m, la aceleración normal de B es

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0{,}04 + 0{,}06t)^2}{0{,}1} = 0{,}016 + 0{,}048t + 0{,}036t^2 \text{ m s}^{-2}.$$

La aceleración total del punto B es así $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$.

5.9 *Movimiento circular: velocidad angular*

Consideremos ahora el caso especial en el cual la trayectoria es un círculo; esto es, *movimiento circular*. La velocidad $\boldsymbol{v}$, siendo tangente al círculo, es perpendicular al radio $R = CA$. Cuando medimos distancias a lo largo de la circunferencia del círculo a partir de O, tenemos, de la Fig. 5-20, que $s = R\theta$, de acuerdo a la ec. (2.5). Por consiguiente, aplicando la ec. (5.23) y considerando el hecho de que R permanece constante, obtenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}. \tag{5.45}$$

La cantidad

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{5.46}$$

se denomina *velocidad angular*, y es igual a la variación del ángulo descrito en la unidad de tiempo. Se expresa en radianes por segundo, rad s^{-1}, o simplemente s^{-1}. Luego

$$v = \omega R. \tag{5.47}$$

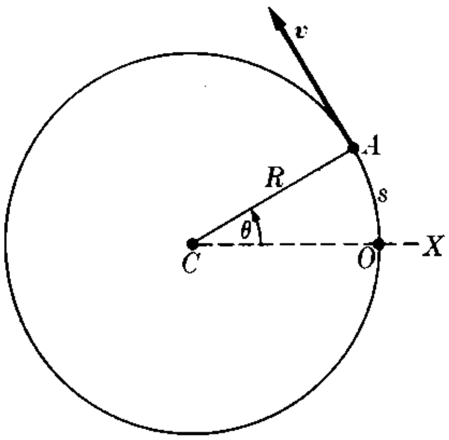


Fig. 5-20. Movimiento circular.

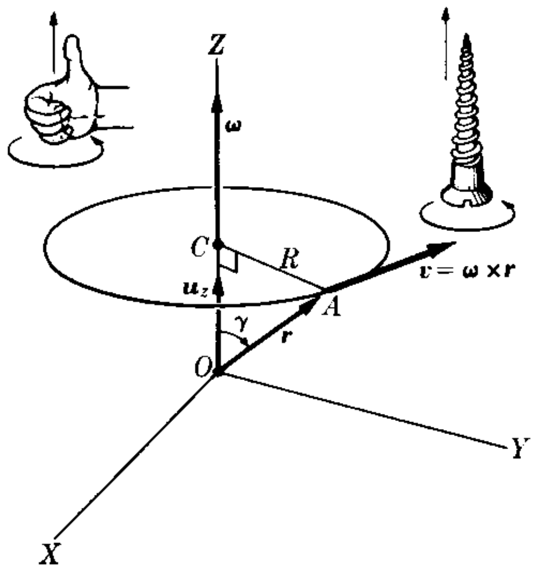


Fig. 5-21. Relación vectorial entre la velocidad angular, la velocidad lineal y el vector de posición en el movimiento circular.

La velocidad angular puede expresarse como una cantidad vectorial cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento en el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha girado en el mismo sentido en que se mueve la partícula (Fig. 5-21). De la figura vemos que $R = r$ sen γ y que $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}_z\,(d\theta/dt)$; por lo tanto podemos escribir, en lugar de la ec. (5.47),

$$v = \omega r \operatorname{sen} \gamma,$$

indicando que la siguiente relación vectorial se cumple, tanto en magnitud como en dirección.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{5.48}$$

Nótese que esto es válido solamente para movimiento circular o rotacional (movimiento con r y γ constantes).

De interés especial es el caso de *movimiento circular uniforme;* esto es, movimiento en el que ω = constante. En este caso, el movimiento es periódico y la partícula pasa por cada punto del círculo a intervalos iguales de tiempo. El *período* P es el tiempo requerido para realizar una vuelta completa o revolución, y la *frecuencia* es el número de revoluciones por unidad de tiempo. Así si en el tiempo t la partícula realiza n revoluciones, el período es $P = t/n$ y la frecuencia es $\nu = n/t$. Ambas cantidades están entónces relacionadas por la siguiente expresión, que usaremos a menudo,

$$\nu = \frac{1}{P}. \tag{5.49}$$

Cuando el período se expresa en segundos, la frecuencia debe expresarse en (segundos)$^{-1}$ o s^{-1}, unidad denominada *hertz*, abreviada Hz. El término usual es revoluciones por segundo (rps) en lugar de s^{-1} o Hz. La unidad fue llamada hertz en honor del físico alemán H. R. Hertz (1857-1894), quien fue el primero en demostrar experimentalmente la existencia de ondas electromagnéticas. Algunas veces la frecuencia de un movimiento se expresa en revoluciones por minuto (rpm), o equivalentemente en (minutos)$^{-1}$. Obviamente 1 min^{-1} $= \frac{1}{60}$ Hz.

Los conceptos de período y frecuencia son aplicables a todos los procesos periódicos que ocurren en forma cíclica; esto es, aquellos procesos que se repiten después de completar cada ciclo. Por ejemplo, el movimiento de la tierra alrededor del sol no es ni circular ni uniforme, pero es periódico. Es un movimiento que se repite cada vez que la tierra completa una órbita. El *período* es el tiempo requerido para completar un ciclo, y la *frecuencia* es el número de ciclos por segundo, correspondiendo un hertz a un ciclo por segundo.

Si ω es constante, tenemos, integrando la ec. (5.46),

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega\, dt = \omega \int_{t_0}^{t} dt \qquad \text{ó} \qquad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0).$$

El estudiante debe comparar esta relación, la cual es válida para el movimiento circular uniforme, con la expresión comparable del movimiento rectilíneo uniforme obtenido en el ejemplo 5.2. Usualmente se adopta $\theta_0 = 0$ y $t_0 = 0$, dando

$$\theta = \omega t \qquad \text{ó} \qquad \omega = \frac{\theta}{t}. \tag{5.50}$$

Para una revolución completa, $t = P$ y $\theta = 2\pi$, resultando

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu. \tag{5.51}$$

EJEMPLO 5.10. Encontrar la velocidad angular de la tierra con respecto a su eje.

Solución: El primer impulso del estudiante sería naturalmente usar la ec. (5.51), con $\omega = 2\pi/P$, escribiendo para el período P el valor de 8,640 $\times$ 10^4 s, correspondiente a un día solar medio. Sin embargo, si operáramos de esta manera, el resultado sería incorrecto. Veamos la Fig. 5-22 (no dibujada a escala) y consideremos un punto P. Cuando la tierra ha completado una revolución con respecto a su eje polar, lo cual se denomina día *sideral*, se encontrará en E', debido a su movimiento de traslación, y el punto estará en P'. Pero para completar un día, la tierra tiene aún que girar a través del ángulo γ hasta que el punto se encuentre en P'', dando cara nuevamente al sol. El período de revolución de la tierra (día sideral) es entonces ligeramente menor que $8{,}640 \times 10^4$ s. Su valor medido es

$$P = 8{,}616 + 10^4 \text{ s},$$

o alrededor de 240 s menor que el día solar medio. La velocidad angular de la tierra es entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 7{,}292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}.$$

Es relativamente simple estimar esta diferencia de 240 s. La tierra cubre su órbita completa alrededor del sol en 365 días, lo cual significa que el ángulo γ correspondiente a un día es ligeramente menor que 1° ó 0,01745 radianes. El tiempo necesario para recorrer este ángulo con la velocidad angular dada líneas arriba, es, por la ec. (5.50),

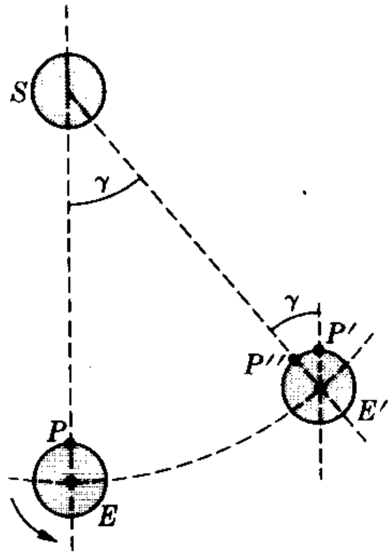


Fig. 5-22. Día Sideral.

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1{,}745 \times 10^{-2} \text{ rad}}{7{,}292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}} = 239 \text{ s},$$

valor que está en excelente acuerdo con nuestro resultado previo.

5.10 *Movimiento circular: aceleración angular*

Cuando la velocidad angular de una partícula cambia con el tiempo, la aceleración angular está definida por el vector

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{5.52}$$

Como el movimiento circular es en un plano, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ permanece invariable, y la relación (ec. 5.52) también se cumple para las magnitudes de las cantidades involucradas. Esto es,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{5.53}$$

Cuando la aceleración angular es constante (esto es, cuando el movimiento circular es uniformemente acelerado), tenemos, integrando la ec. (5.53),

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$$

ó

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0), \tag{5.54}$$

donde ω_0 es el valor de ω para el tiempo t_0. Sustituyendo la ec. (5.54) en la ec. (5.46), obtenemos $d\theta/dt = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$, e integrando nuevamente,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 \, dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0) \, dt,$$

de modo que

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2. \tag{5.55}$$

Esto da la posición angular para cualquier tiempo.

En el caso particular de movimiento uniforme, encontramos combinando las ecs. (5.43) y (5.47) con la ec. (5.53), que la aceleración tangencial (o transversal) es

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha, \tag{5.56}$$

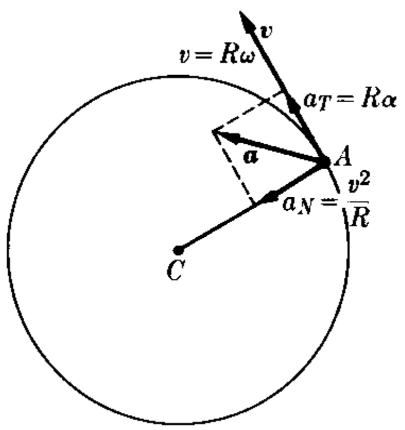


Fig. 5-23. Aceleraciones tangencial y normal en el movimiento circular.

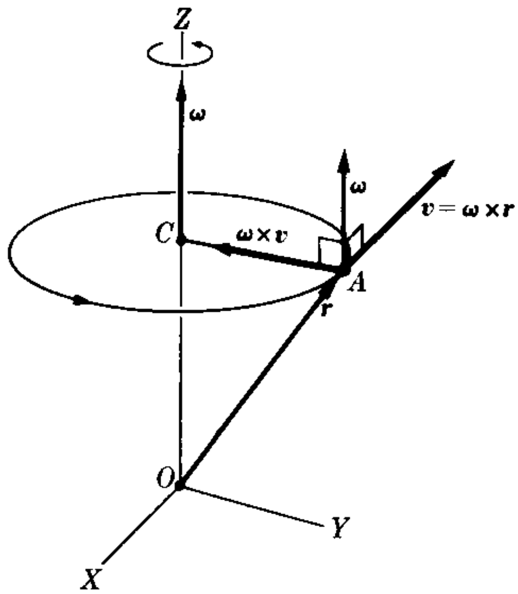


Figura 5-24

y que la aceleración normal (o centrípeta) es

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{5.57}$$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el movimiento circular se ilustran en la Fig. 5-23.

Nótese que en el movimiento circular uniforme (aceleración angular nula, $\alpha = 0$), no hay aceleración tangencial, pero sí aceleración normal o centrípeta debido al cambio de dirección de la velocidad.

En este caso de movimiento circular uniforme podemos calcular la aceleración directamente usando la ec. (5.48). Luego, como ω es constante,

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}, \tag{5.58}$$

ya que $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$. Usando la ec. (5.48) nuevamente, podemos escribir la aceleración en la forma alterna

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{5.59}$$

Como el movimiento circular es uniforme, la aceleración dada por la ec. (5.58) o (5.59) debe ser la aceleración cetrípeta. Esto puede verificarse fácilmente. Refiriéndose a la Fig. 5-24, vemos que el vector $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ señala hacia el centro del círculo, y su magnitud es $|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}| = \omega v = \omega^2 R$, ya que $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares y $v = \omega R$. Este valor coincide con nuestro resultado previo (5.57).

EJEMPLO 5.11. **La tierra rota uniformemente con respecto a su eje con una velocidad angular $\omega = 7{,}292 \times 10^{-5}$ s^{-1}. Encontrar, en función de la latitud, la velocidad y la aceleración de un punto sobre la superficie terrestre.**

Solución: Debido al movimiento rotacional de la tierra, todos los puntos sobre su superficie se mueven con movimiento circular uniforme. La latitud del punto A (Fig. 5-25) se define como el ángulo λ que el radio $r = CA$ forma con el radio CD situado en el ecuador. Cuando la tierra gira alrededor del eje NS, un punto tal como A describe un círculo de centro B y radio $R = AB$ tal que

$$R = r \cos \lambda.$$

La velocidad de un punto sobre la superficie de la tierra es tangente al círculo, y es por tanto paralela al ecuador. Su magnitud, por la ec. (5.47) es

$$v = \omega R = \omega r \cos \lambda.$$

La aceleración a es centrípeta porque el movimiento es uniforme, y está dirigida hacia B. Su magnitud, por la ec. (5.57), es

$$a = \omega^2 R = \omega^2 r \cos \lambda. \tag{5.60}$$

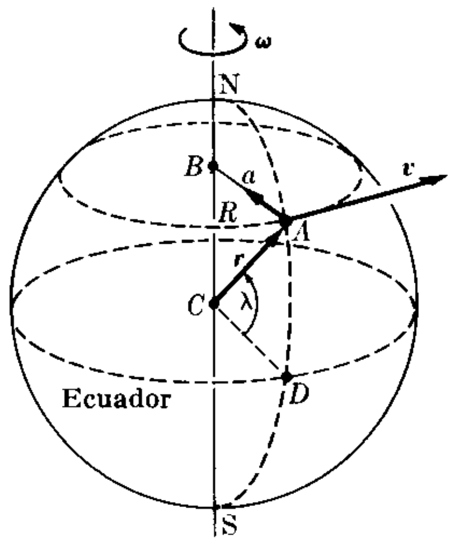


Fig. 5-25. Velocidad y aceleración de un punto sobre la tierra.

Introduciendo los valores de la velocidad angular ($\omega = 7{,}292 \times 10^{-5}$ s^{-1}) y el radio de la tierra ($r = 6{,}35 \times 10^6$ m), tenemos

$$v = 459 \cos \lambda \text{ m s}^{-1},$$

y la aceleración es

$$a = 3{,}34 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m s}^{-2}. \tag{5.61}$$

El valor máximo de v ocurre en el ecuador, para el cual $v = 459$ m s^{-1} ó 1652 km hr^{-1} o cerca de 1030 mi hr^{-1}. Nosotros no sentimos los efectos de esta velocidad tan grande, porque siempre hemos estado moviéndonos a dicha velocidad y nuestros cuerpos y sentidos se han acostumbrado a ella. Pero notaríamos inmediatamente un cambio en ella. Similarmente, el máximo valor de la aceleración es $3{,}34 \times 10^{-2}$ m s^{-2}, el cual es alrededor del 0,3 % de la aceleración debida a la gravedad.

5.11 *Movimiento curvilíneo general en un plano*

Considerar la Fig. 5.26, en la cual una partícula describe una trayectoria curvilínea en un plano. Cuando se encuentra en *A*, su velocidad está dada por $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$. Usando los vectores unitarios $\boldsymbol{u}_r$ (paralelo a $\boldsymbol{r}$) y $\boldsymbol{u}_\theta$ (perpendicular a $\boldsymbol{r}$), podemos escribir $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_r r$. Por consiguiente

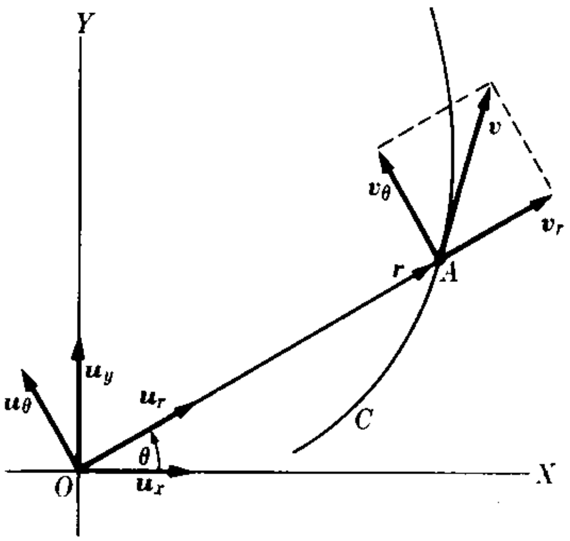


Figura 5-26

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_r r) = \boldsymbol{u}_r \frac{dr}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} r. \tag{5.62}$$

Ahora, usando las componentes rectangulares de los vectores unitarios,

$$\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_x \cos\theta + \boldsymbol{u}_y \operatorname{sen}\theta$$

y

$$\boldsymbol{u}_\theta = -\boldsymbol{u}_x \operatorname{sen}\theta + \boldsymbol{u}_y \cos\theta,$$

vemos que

$$\frac{d\boldsymbol{u}_r}{dt} = -\boldsymbol{u}_x \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} + \boldsymbol{u}_y \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \boldsymbol{u}_\theta \frac{d\theta}{dt},$$

y por consiguiente podemos escribir la velocidad de la partícula como

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_r \frac{dr}{dt} + \boldsymbol{u}_\theta r \frac{d\theta}{dt}.} \tag{5.63}$$

La primera parte de esta ecuación $[\boldsymbol{u}_r(dr/dt)]$ es un vector paralelo a $\boldsymbol{r}$ y se llama la *velocidad radial;* es debida al cambio en la distancia r de la partícula del punto *O*. La segunda parte $[\boldsymbol{u}_\theta r(d\theta/dt)]$ es un vector perpendicular a $\boldsymbol{r}$ y es debido al cambio en la dirección de $\boldsymbol{r}$, o la rotación de la partícula alrededor de *O*; se denomina la *velocidad transversal.* Esto es

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \omega r, \tag{5.64}$$

ya que $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular en este caso. En el movimiento circular no hay velocidad radial porque el radio es constante; esto es, $dr/dt = 0$. La velocidad es enteramente transversal, como podemos ver comparando la ec. (5.45) con la segunda relación en la ec. (5.64).

Bibliografía

1. "The Perception of Motion", H. Wallach. *Sci. Am.*, julio de 1959, pág. 56
2. "Aristotle's Notion of Speed", R. Seeger. *Am. J. Phys.* **31**, 138 (1963)
3. *Mechanics*, Keith R. Symon. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1960, secciones 1-2, 3-4, 3-5 y 3-11
4. *Physical Mechanics*, Robert B. Lindsay. New York : Van Nostrand, 1961, secciones 1-4 y 1-5, caps. 2 y 3
5. *Introduction to Engineering Mechanics*, John V. Huddleston. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1961, cap. 5, secciones 6-5 y 6-6
6. *Vector Mechanics*, D. E. Christie. New York : McGraw-Hill, 1964, cap. 5
7. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I. R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. L. Sands. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1963, caps. 5 y 8
8. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1963, pág. 1 (Galileo) ; pág. 50 (Descartes) ; pág. 51 (Leibniz) ; pág. 55 (d'Alembert)
9. *Foundations of Modern Physical Science*, Gerald Holton y D. H. D. Roller. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1958, caps. 1, 2 y 3

Problemas

5.1 Un electrón incide sobre una pantalla de televisión con una velocidad de 3×10^6 m s^{-1}. Suponiendo que ha sido acelerado desde el reposo a través de una distancia de 0,04 m, encontrar su aceleración promedio.

5.2 Un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de 3 m s^{-1}, y una aceleración constante de 4 m s^{-2} en la misma dirección que la de la velocidad. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo y la distancia recorrida al final de 7 s? Resolver el mismo problema para un cuerpo cuya aceleración tiene dirección opuesta de la velocidad. Escribir la expresión del desplazamiento en función del tiempo.

5.3 Un aeoroplano, al partir, recorre 600 m, en 15 s. Suponiendo una aceleración constante calcular la velocidad de partida. Calcular también la aceleración en m s^{-2}.

5.4 Un automóvil, que parte del reposo, alcanza una velocidad de 60 km hr^{-1} en 15 s. (a) Calcular la aceleración promedio en m min^{-2} y la distancia recorrida. (b) Suponiendo que la aceleración es constante, ¿cuántos segundos más le tomará al auto para alcanzar los 80 km hr^{-1}? ¿Cuál ha sido la distancia total recorrida?

5.5 Un auto parte del reposo y se desplaza con una aceleración de 1 m s^{-2} durante 1 s. Luego se apaga el motor y el auto desacelera debido a la fricción, durante 10 s a un promedio de 5 cm s^{-2}. Entonces se aplican los frenos y el auto se detiene en 5 segundos más. Calcular la distancia total recorrida por el auto. Hacer un gráfico de x, v y a contra t.

5.6 Un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado viaja 55 pies en 2 s. Durante los próximos 2 s, cubre 77 pies. Calcular la velocidad inicial del cuerpo y su aceleración. ¿Qué distancia recorrerá en los próximos 4 s?

5.7 Un auto viaja a lo largo de la línea OX con movimiento uniformemente acelerado. En los tiempos t_1 y t_2, sus posiciones son x_1 y x_2, respectivamente. Demostrar que su aceleración es $a = 2(x_2t_1 - x_1t_2)/t_1t_2(t_2 - t_1)$.

5.8 Un auto parte del reposo y se mueve con una aceleración de 4 m s^{-2}

y viaja durante 4 s. Durante los próximos 10 s se mueve con movimiento uniforme. Se aplican luego los frenos y el auto desacelera a razón de 8 m s^{-2} hasta que se detiene. Hacer un gráfico de la velocidad contra el tiempo y demostrar que el área comprendida entre la curva y el eje del tiempo mide la distancia total recorrida.

5.9 Un auto está esperando que cambie la luz roja. Cuando la luz cambia a verde, el auto acelera uniformemente durante 6 s a razón de 2 m s^{-2}, después de lo cual se mueve con velocidad constante. En el instante que el auto comienza a moverse, un camión que se mueve en la misma dirección con movimiento uniforme de 10 m s^{-1}, lo pasa. ¿En qué tiempo, y a qué distancia se encontrarán nuevamente el auto y el camión?

5.10 Un automóvil se está moviendo a una velocidad de 45 km hr^{-1} cuando una luz roja se enciende en una intersección. Si el tiempo de reacción del conductor es de 0,7 s, y el auto desacelera a razón de 7 m s^{-2} tan pronto el conductor aplica los frenos, calcular qué distancia recorrerá el auto desde el instante en que el conductor nota la luz roja hasta que el auto se detiene. "Tiempo de reacción" es el intervalo entre el tiempo en que el conductor nota la luz y el tiempo que aplica los frenos.

5.11 Dos autos, A y B, están viajando en la misma dirección con velocidades v_A y v_B, respectivamente. Cuando el auto A se encuentra a una distancia d detrás del auto B, se aplican los frenos de A, causando una desaceleración a. Demostrar que a fin de que haya un choque entre A y B, es necesario que $v_A - v_B > \sqrt{2ad}$.

5.12 Dos autos, A y B, se mueven en la misma dirección. Cuando $t = 0$, sus velocidades respectivas son 1 pie s^{-1} y 3 pies s^{-1}, y sus respectivas aceleraciones son 2 pies s^{-2} y 1 pie s^{-2}. Si el auto A se encuentra 1,5 pies delante del auto B cuando $t = 0$, calcular cuándo se encontrarán lado a lado.

5.13 Un cuerpo se está moviendo a lo largo de una recta de acuerdo a la ley $x = 16t - 6t^2$, donde x se mide en metros y t en segundos. (a) Encontrar la posición del cuerpo cuando $t = 1$ s. (b) ¿Para qué tiempos el cuerpo pasa por el origen? (c) Calcular la velocidad promedio para el intervalo de tiempo $0 < t < 2$ s. (d) Encontrar la expresión general de la velocidad promedio en el intervalo $t_0 < t < (t_0 + \Delta t)$. (e) Calcular la velocidad en cualquier instante. (f) Calcular la velocidad instantánea para $t = 0$. (g) ¿Para qué tiempos y posiciones estará el cuerpo estacionario? (h) Encontrar la expresión general de la aceleración promedio para el intervalo de tiempo $t_0 < t < (t_0 + \Delta t)$. (i) Encontrar la expresión general de la aceleración instantánea en cualquier instante. (j) ¿Para qué tiempos es la aceleración instantánea cero? (k) Representar en un conjunto simple de ejes x contra t, v contra t, y a contra t. (l) ¿Para qué tiempo(s) el movimiento es acelerado y para qué tiempo(s) es retardado?

5.14 Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ley $v = t^3 + 4t^2 + 2$. Si $x = 4$ pies cuando $t = 2$ s, encontrar el valor de x cuando $t = 3$ s. Encontrar también su aceleración.

5.15 La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $a = 4 - t^2$, donde a se da en m s^{-2} y t en segundos. Encontrar las expresiones de la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo, suponiendo que para $t = 3$ s, $v = 2$ m s^{-1} y $x = 9$ m.

5.16 Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta. Su aceleración está dada por $a = -2x$, donde x está en pies y a está en pies s^{-2}. Encontrar la relación entre la velocidad y la distancia, suponiendo que cuando $x = 0$, $v = 4$ pies s^{-1}.

5.17 La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta está dada por $a = -Kv^2$, donde K es una constante y suponiendo que cuando $t = 0$, $v = v_0$. Encontrar la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo. Encontrar también x en función de t y v en función de x.

5.18 Para un cuerpo en movimiento rectilíneo cuya aceleración está dada por $a = 32 - 4v$ (las condiciones iniciales son $x = 0$ y $v = 4$ cuando $t = 0$), encontrar v en función de t, x en función de t, y x en función de v.

5.19 La posición de un cuerpo en movimiento en función del tiempo se presenta en la Fig. 5-27. Indicar (a) dónde el movimiento es en la dirección positiva y negativa de las X. (b) Cuándo el movimiento es acelerado o retardado. (c) Cuándo el cuerpo pasa por el origen, y (d) cuándo la velocidad es cero. Hacer también un esquema de la velocidad y la aceleración en función del tiempo. Estimar del gráfico la velocidad promedio entre (a) $t = 1$ s y $t = 3$ s, (b) $t = 1$ s y $t = 2,2$ s, (c) $t = 1$ s y $t = 1,8$ s.

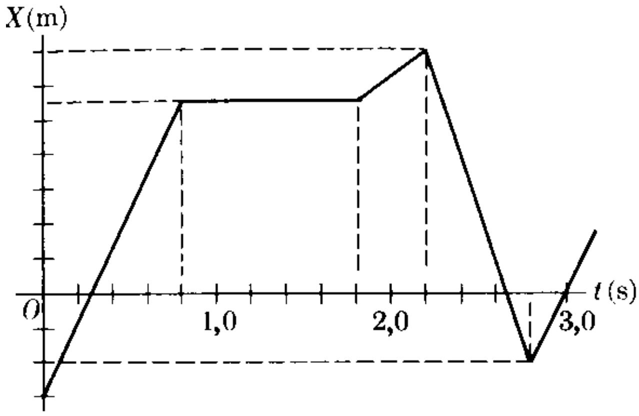


Fig. 5-27. Aceleración debida a la rotación de la tierra.

5.20 Una piedra cae desde un globo que desciende a una velocidad uniforme de 12 m s⁻¹. Calcular la velocidad y la distancia recorrida por la piedra después de 10 s. Resolver el mismo problema para el caso cuando el globo se eleva a la misma velocidad.

5.21 Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m s^{-1}. ¿Cuándo tendrá una velocidad de 6 m s^{-1} y a qué altura se encontrará?

5.22 Se tira una piedra hacia arriba desde el fondo de un pozo de 88 pies de profundidad con una velocidad inicial de 240 pies s^{-1}. Calcular el tiempo que demorará la piedra en alcanzar el borde del pozo, y su velocidad. Discutir las respuestas posibles.

5.23 Un hombre parado en el techo de un edificio tira una bola verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 pies s^{-1}. La bola llega al suelo 4,25 s más tarde. ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la bola? ¿Qué altura tiene el edificio? ¿Con qué velocidad llegará la bola al suelo?

5.24 Un cuerpo que cae recorre 224 pies en el último segundo de su movimiento. Suponiendo que el cuerpo partió del reposo, determinar la altura desde la cual cayó el cuerpo y qué tiempo le tomó llegar al suelo.

5.25 Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio con una velocidad de 29,4 m s^{-1}. Otra piedra se deja caer 4 s después que se lanza la primera. Demostrar que la primera piedra pasará a la segunda exactamente 4 s después que se soltó la segunda.

5.26 Un cuerpo se deja caer y simultáneamente un segundo cuerpo, se tira hacia abajo con una velocidad inicial de 100 cm s^{-1}. ¿Cuándo será la distancia entre ellos de 18 m?

5.27 Se tiran dos cuerpos verticalmente hacia arriba, con la misma velocidad de salida de 100 m s^{-1}, pero separados 4 s. ¿Qué tiempo transcurrirá desde que se lanzó el primero para que se vuelvan a encontrar?

5.28 Un cuerpo cae libremente. Demostrar que la distancia que recorre durante el enésimo segundo es $(n - \frac{1}{2})g$.

5.29 Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6,5 s más tarde. Si la velocidad del sonido es de 1120 pies s^{-1}, calcular la altura del edificio.

5.30 Calcular la velocidad angular de un disco que gira con movimiento uniforme 13,2 radianes cada 6 segundos. Calcular también el período y la frecuencia de rotación.

5.31 ¿Qué tiempo le tomará al disco del problema anterior (a) girar un ángulo de 780°, y (b) dar 12 revoluciones?

5.32 Calcular la velocidad angular de las tres manecillas de un reloj.

5.33 Calcular la velocidad angular, la velocidad lineal, y la aceleración centrípeta de la luna, derivando su respuesta del hecho que la luna realiza una revolución completa en 28 días y que la distancia promedio de la tierra a la luna es de $38,4 \times 10^4$ km.

5.34 Encontrar (a) la magnitud de la velocidad y (b) la aceleración centrípeta de la tierra en su movimiento alrededor del sol. El radio de la órbita terrestre es de $1,49 \times 10^{11}$ m y su período de revolución es de $3,16 \times 10^7$ s.

5.35 Encontrar la magnitud de la velocidad y la aceleración centrípeta del sol en su movimiento a través de la Vía Láctea. El radio de la órbita del sol es de $2,4 \times 10^{20}$ m y su período de revolución es de $6,3 \times 10^{15}$ s.

5.36 Una volante cuyo diámetro es de 3 m está girando a 120 rpm. Calcular: (a) su frecuencia, (b) el período, (c) la velocidad angular, y (d) la velocidad lineal de un punto sobre su borde.

5.37 La velocidad angular de un volante aumenta uniformemente de 20 rad s^{-1} a 30 rad s^{-1} en 5 s. Calcular la aceleración angular y el ángulo total recorrido.

5.38 Un volante cuyo diámetro es de 8 pies tiene una velocidad angular que disminuye uniformemente de 100 rpm en $t = 0$, hasta detenerse cuando $t = 4$ s. Calcular las aceleraciones tangencial y normal de un punto situado sobre el borde del volante cuando $t = 2$ s.

5.39 Sobre un electrón cuya velocidad es de $4,0 \times 10^6$ m s^{-1} actúa un campo magnético que lo obliga a describir una trayectoria circular de 3,0 m. Encontrar su aceleración centrípeta.

5.40 Un cuerpo, inicialmente en reposo ($\theta = 0$ y $\omega = 0$ cuando $t = 0$) es acelerado en una trayectoria circular de 1,3 m de radio de acuerdo a la ecuación $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$. Encontrar la posición angular y la velocidad angular del cuerpo en función del tiempo, y las componentes tangencial y centrípeta de su aceleración.

5.41 Un punto se mueve en un círculo de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde s se mide en pies a lo largo del círculo y t en segundos. Si la aceleración total del punto es $16\sqrt{2}$ pies s^{-2} cuando $t = 2$ s, calcular el radio del círculo.

5.42 Una partícula se está moviendo en un círculo de acuerdo a la ley $\theta = 3t^2 + 2t$ donde θ se mide en radianes y t en segundos. Calcular la velocidad angular y la aceleración angular después de 4 s.

5.43 Una rueda parte del reposo y acelera de tal manera que su velocidad angular aumenta uniformemente a 200 rpm en 6 s. Después de haber estado girando por algún tiempo a esta velocidad, se aplican los frenos y la rueda toma 5 min en detenerse. Si el número total de revoluciones de la rueda es de 3100, calcular el tiempo total de rotación.

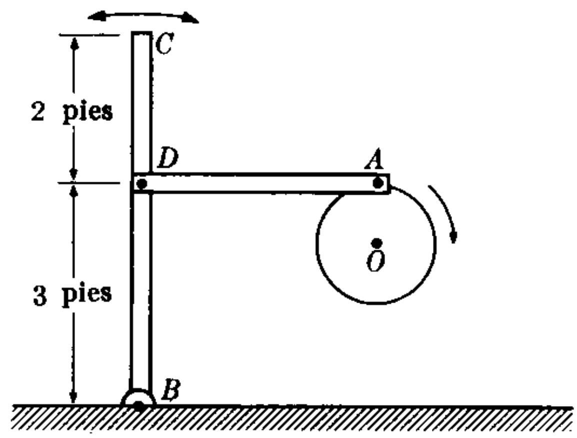


Figura 5-28

5.44 La barra BC de la Fig. 5-28 está oscilando debido a la acción de la barra AD. El punto A está unido al borde de un volante cuyo diámetro es de 9 pulgadas y el cual está girando a una velocidad angular de 60 rpm y a una aceleración angular de 6 rad s^{-2}. Calcular (a) la velocidad lineal en el punto D, (b) la velocidad angular de BC, (c) las aceleraciones tangencial y normal del punto C, (d) la aceleración angular de BC, (e) la aceleración tangencial en D.

5.45 Un volante de 4 pies de radio está girando con respecto a un eje horizontal mediante una cuerda enrollada en su borde y con un peso en su extremo. Si la distancia vertical recorrida por el peso está dada por la ecuación $x = 40t^2$, donde x se mide en pies y t en segundos, calcular la velocidad angular y la aceleración angular del volante en cualquier instante.

5.46 La posición angular de una partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia de un círculo de 5 pies de radio está dada por la expresión $\theta = 3t^2$, donde θ se da en radianes y t en segundos. Calcular las aceleraciones tangencial, normal, y total de la partícula cuando $t = 0{,}5$ s.

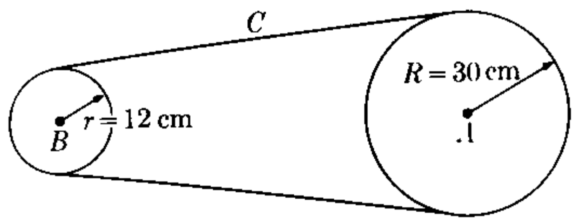


Figura 5-29

5.47 La rueda A (Fig. 5-29) cuyo radio tiene 30 cm parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razón de $0{,}4\pi$ rad s^{-1}. La rueda transmite su movimiento a la rueda B mediante la correa C. Obtener una relación entre las aceleraciones angulares y los radios de las dos ruedas. Encontrar el tiempo necesario para que la rueda B alcance una velocidad angular de 300 rp minuto.

5.48 Una bola se está moviendo hacia el norte a 300 cm s^{-1} cuando se le aplica una fuerza durante 40 s, dando lugar a una aceleración hacia el este de 10 cm s^{-2}, después de lo cual se quita la fuerza. Determinar (a) la magnitud y dirección de la velocidad final de la bola, (b) la ecuación de su trayectoria, (c) su distancia del punto de partida, (d) su desplazamiento del punto de partida.

5.49 Un tren se está moviendo a 72 km hr^{-1} cuando una linterna que está colgando en el extremo del tren a 4,9 m sobre el piso, se suelta. Calcular la distancia recorrida por el tren en el tiempo que demora la lámpara en caer al suelo. ¿Dónde cae la lámpara con respecto al tren y a los rieles? ¿Cuál es la trayectoria relativa al tren y cuál a los rieles?

5.50 Un auto está viajando en una curva plana tal que sus coordenadas rectangulares, en función del tiempo, están dadas por $x = 2t^3 - 3t^2$, $y = t^2 - 2t + 1$. Suponiendo que t está dado en segundos y las coordenadas en metros, calcular (a) la posición del auto cuando $t = 1$ s, (b) las componentes rectangulares de la velocidad en cualquier instante, (c) las componentes rectangulares de la velocidad cuando $t = 1$ s, (d) la velocidad en cualquier instante, (e) la velocidad cuando $t = 0$ s, (f) el (los) tiempo(s) cuando la velocidad es cero, (g) las componentes rectangulares de la aceleración en cualquier instante, (h) las componentes rectangulares de la aceleración cuando $t = 1$ s, (i) la aceleración en cualquier instante, (j) la aceleración cuando $t = 0$ s, (k) el (los) tiempo(s) cuando la aceleración es paralela al eje Y.

5.51 Un jugador de beisbol golpea la bola de modo que adquiere una velocidad de 48 pies s^{-1} en un ángulo de 30° sobre la horizontal. Un segundo jugador, parado a 100 pies del bateador y en el mismo plano de la trayectoria de la bola, comienza a correr en el mismo instante en que el primero golpea la bola. Calcular su velocidad mínima si él puede alcanzarla a 8 pies sobre el suelo y considerando que la bola se encontraba a 3 pies de altura cuando recibió el golpe. ¿Qué distancia tuvo que correr el segundo jugador?

5.52 Las coordenadas de una partícula en movimiento están dadas por $x = t^2$, $y = (t - 1)^2$. Encontrar su velocidad promedio y aceleración en el intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$. Aplicar los resultados para el caso cuando $t = 2$ s y $\Delta t = 1$ s y comparar con los valores de la velocidad y aceleración para $t = 2$ s. Representar todos los vectores que intervienen.

5.53 La posición de una partícula en el tiempo t está dada por $x = A \operatorname{sen} \omega t$. Encontrar su velocidad y aceleración en función de t y de x.

5.54 Un punto se está moviendo con velocidad constante de 3 pies s^{-1}. La velocidad tiene una dirección tal que hace un ángulo de $(\pi/2)t$ radianes con el eje positivo de las X. Si $x = y = 0$ cuando $t = 0$, encontrar la ecuación de la trayectoria de la partícula.

5.55 Las coordenadas de un cuerpo en movimiento son $x = t^2$, $y = (t - 1)^2$.

(a) Encontrar la ecuación Cartesiana de la trayectoria. (*Ayuda:* Eliminar t de las ecuaciones.) (b) Representar la trayectoria. (c) ¿Cuándo se tiene la velocidad mínima? (d) Encontrar las coordenadas cuando la velocidad es 10 pies s^{-1}. (e) Calcular las aceleraciones tangencial y normal en cualquier instante. (f) Calcular las aceleraciones tangencial y normal cuando $t = 1$ s.

5.56 Una partícula se está moviendo a lo largo de una parábola $y = x^2$ de modo que en cualquier instante $v_x = 3$ pies s^{-1}. Calcular la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración de la partícula en el punto $x = \frac{2}{3}$ pie.

5.57 Las coordenadas de un cuerpo en movimiento son $x = 2 \operatorname{sen} \omega t$, $y = 2 \cos \omega t$. (a) Encontrar la ecuación Cartesiana de la trayectoria. (b) Calcular el valor de la velocidad en cualquier instante. (c) Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante. Identificar el tipo de movimiento descrito por las ecuaciones expuestas.

5.58 Si las coordenadas de un cuerpo en movimiento son $x = at$, $y = b \operatorname{sen} at$, demostrar que el valor de la aceleración es proporcional a la distancia, entre el cuerpo y el eje X. Hacer un gráfico de la trayectoria.

5.59 Un punto se mueve en el plano XY de tal manera que $v_x = 4t^3 + 4t$, $v_y = 4t$. Si la posición del punto es (1, 2) cuando $t = 0$, encontrar la ecuación Cartesiana de la trayectoria.

5.60 Una partícula se mueve en el plano XY de acuerdo a la ley $a_x = -4 \operatorname{sen} t$, $a_y = 3 \cos t$. Si cuando $t = 0$, $x = 0$ $y = 3$, $v_x = 4$, $v_y = 0$: Encontrar (a) la ecuación de la trayectoria y (b) calcular el valor de la velocidad cuando $t = \pi/4$ s.

5.61 Un proyectil es disparado con una velocidad de 600 m s^{-1} haciendo un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular (a) el alcance horizontal, (b) la altura máxima, (c) la velocidad y altura después de 30 s, (d) la velocidad y el tiempo cuando el proyectil se encuentra a 10 km de altura.

5.62 Un avión bombardero está volando horizontalmente a una altura de 1,2 km con una velocidad de 180 km hr^{-1}. (a) ¿Cuánto tiempo antes de que el avión esté sobre el blanco debe dejar caer la bomba? (b) ¿Cuál es la velocidad de la bomba al llegar al suelo? (c) ¿Cuál es la velocidad de la bomba 10 s después de soltarla? (d) ¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando se encuentra a 200 m de altura y cuando llega al suelo? (e) ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje horizontal la velocidad de la bomba al caer al suelo? (f) ¿Cuál es la distancia horizontal cubierta por la bomba?

5.63 Un proyectil es disparado haciendo un ángulo de 35°. Llega al suelo a una distancia de 4 km del cañón. Calcular (a) la velocidad inicial, (b) el tiempo de vuelo, (c) la máxima altura, (d) la velocidad en el punto de máxima altura.

5.64 Un cañón está situado en lo alto de un arrecife a una altura de 400 pies. Dispara un proyectil con una velocidad de 786 pies s^{-1} haciendo un ángulo de 30° sobre la horizontal. Calcular el alcance (distancia horizontal desde la base del arrecife) del cañón. Si un auto se dirige directamente al arrecife a una velocidad de 60 mi hr^{-1} a lo largo de un camino horizontal, ¿a qué distancia debe estar el auto del arrecife para sentir el impacto del proyectil? Repetir el problema para un disparo bajo la horizontal. Repetir el problema cuando el auto se aleja del arrecife.

5.65 Un cañón está colocado en la base de un cerro cuya pendiente hace un ángulo ϕ con la horizontal. Si el cañón hace un ángulo α con la horizontal y dispara un proyectil con velocidad v_0, encontrar la distancia, medida a *lo largo* del cerro, a la cual caerá el proyectil.

5.66 Un aeroplano está volando horizontalmente a una altura h con velocidad v. En el instante que el aeroplano está directamente sobre un cañón antiaéreo, el cañón dispara al aeroplano. Calcular la velocidad mínima v_0 y el ángulo de apunte α que requiere el proyectil para darle al aeroplano.

5.67 Una ametralladora dispara una bala con una velocidad de 650 pies s^{-1}.

Determinar los ángulos bajo los cuales la bala alcanzará un blanco situado a 450 pies de distancia y 18 pies de alto.

5.68 Encontrar el radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria de un proyectil disparado haciendo un ángulo inicial α con la horizontal.

5.69 Un cazador apunta a una ardilla que se encuentra en la rama de un árbol. En el momento que él dispara su rifle la ardilla se deja caer de la rama. Demostrar que la ardilla no debió moverse si deseaba seguir viviendo.

5.70 Un aeroplano vuela horizontalmente a una altura de 1 km y con una velocidad de 200 km hr^{-1}. Deja caer una bomba que debe dar en un barco que viaja en la misma dirección a una velocidad de 20 km hr^{-1}. Demostrar que la bomba debe dejarse caer cuando la distancia horizontal entre el aeroplano y el barco es de 715 m. Resolver el mismo problema para el caso en el cual el barco se está moviendo en la dirección opuesta.

5.71 Demostrar que para un movimiento plano bajo aceleración constante $\boldsymbol{a}$, se cumple la siguiente relación:

$$v^2 = v_0^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

y

$$\boldsymbol{r} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0)t + \boldsymbol{r}_0.$$

5.72 Un disco de radio R rueda con velocidad constante v_0 a lo largo de un plano horizontal. Demostrar que la posición de cualquier punto sobre su borde está dado por las ecuaciones $x = R(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)$ e $y = R(1 - \cos \omega t)$, donde $\omega = v_0/R$ es la velocidad angular del disco y t se mide desde el instante en que el punto se encuentra en contacto con el plano. Encontrar también las componentes de la velocidad y la aceleración del punto.

5.73 Un disco de radio R rueda a lo largo de un plano horizontal. Demostrar que en cada instante la velocidad de cada punto es perpendicular a la línea que une el punto con el punto de contacto del disco y el plano. Si ρ es la distancia entre estos puntos, demostrar que la magnitud de la velocidad del punto que se mueve es $\omega\rho$. ¿Qué conclusiones obtiene usted de estos resultados?

5.74 Usando el método explicado en la sección 5.11 demostrar que

$$d\boldsymbol{u}_\theta/dt = -\boldsymbol{u}_r\, d\theta/dt.$$

5.75 Demostrar que las componentes de la aceleración a lo largo de los vectores unitarios $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_\theta$ (Fig. 5-26) son

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad a_\theta = 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

[*Ayuda:* Usar la expresión (5.63) de la velocidad y tomar en cuenta los valores de $d\boldsymbol{u}_r/dt$ y $d\boldsymbol{u}_\theta/dt$]