

24/4/07

TEMA 5: SISTEMAS CON SIMETRÍA ESFÉRICA

5.1 Métrica de Schwarzschild

Objetivo: usar eqs. Einstein para describir objetos astronómicos con sim. esférica

(c1) Noción de simetría esférica en espacio-tiempo (E-T) arbitrario:

- formalmente: isometrías
- físicamente (la que seguiremos)

Minkowski

2-superficie
 $t, r = \text{cte} \Rightarrow dl^2 = r^2 d\Omega^2$ separable
 exigimos que línea ($\theta = \text{cte}, \varphi = \text{cte}$) \perp esf. concéntr

$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$ ($g_{r\theta} = 0$)
 $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$ ($g_{r\varphi} = 0$)

Métrica $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$

E-T esf. simétrico (más restrictivo)

exigimos, además, que:

línea $\left\{ \begin{array}{l} r = \text{cte} \\ \theta = \text{cte} \\ \varphi = \text{cte} \end{array} \right. \perp$ esferas concéntricas

$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_\theta = 0$ ($g_{t\theta} = g_{t\varphi} = 0$)
 $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_\varphi = 0$

Métrica

$ds^2 = g_{00}(r,t) dt^2 + 2g_{0r}(r,t) dt dr + g_{rr}(r,t) dr^2 + r^2 d\Omega^2$
 + inversión temporal $t \rightarrow -t$

Estudieemos caso estacionario (c2) ($g_{\mu\nu} \neq f(t)$) y estático (c3) (no cambia bajo inversión temporal)

$g_{00} = g_{00}(r)$
 $g_{rr} = g_{rr}(r)$
 $g_{0r} = 0$

$ds^2 = g_{00}(r) dt^2 + g_{rr}(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$

¿cómo modifican g_{00} y g_{rr} (distrib. de mat-energ. esf. sim.) la métrica de Minkowski? Éste es el problema de Schwarzschild.

Para $r \rightarrow \infty$ esperamos

$g_{00}(r) = -e^{N(r)}$
 $g_{rr}(r) = e^{L(r)}$

$g_{00} \rightarrow -1$ y $g_{rr} \rightarrow 1$, luego proponemos:
 además de los conocidos $g_{\theta\theta} = r^2$
 $g_{\varphi\varphi} = r^2 \text{sen}^2\theta$

Verificad que los símbolos de Christoffel para esta métrica son:

$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{N'}{2}$

$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$

$\Gamma_{00}^1 = \frac{N'}{2} e^{N-L}$

$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta \cos\theta$

$\Gamma_{11}^1 = \frac{L'}{2}$

$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$

$\Gamma_{22}^1 = -r e^{-L}$

$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg\theta$

$\Gamma_{33}^1 = -r \text{sen}^2\theta e^{-L}$

y cero los demás

25/4/07

(C4) La cuarta condición que vamos a aplicar es la de vacío.

En el vacío, las ecs. de Einstein se reducen a $R_{\mu\nu} = 0$.

En nuestro caso, sólo tenemos términos diagonales.

Recordemos cómo se calcula tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}$$

Ejemplos: • $R_{00} = \underbrace{\Gamma_{0\lambda,0}^{\lambda}}_a - \underbrace{\Gamma_{00,\lambda}^{\lambda}}_b + \underbrace{\Gamma_{0\lambda}^{\alpha} \Gamma_{0\alpha}^{\lambda}}_c - \underbrace{\Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}}_d$

$$a = 0$$

$$b = -\Gamma_{00,r}^r = -\frac{N''}{2} e^{N-L} + (L'-N') \frac{N'}{2} e^{N-L}$$

$$c = \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{00}^{\lambda} = \frac{N'^2}{4} e^{N-L}$$

$$d = -\Gamma_{00}^1 \Gamma_{\lambda 1}^{\lambda} = -\Gamma_{00}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) = -\frac{N'}{2} e^{N-L} \left(\frac{N'}{2} + \frac{L'}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow R_{00} = e^{N-L} \left(\frac{N'L'}{4} - \frac{N'}{r} - \frac{N'^2}{4} - \frac{N''}{2} \right)$$

$$\bullet R_{11} = \Gamma_{1\lambda,1}^{\lambda} - \Gamma_{11,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{1\lambda}^{\alpha} \Gamma_{1\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{11}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}$$

$$a = \Gamma_{10,1}^0 + \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{13,1}^3 = \frac{N''}{2} + \frac{L''}{2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$$

$$b = -\Gamma_{11,1}^1$$

$$c = \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 = \left(\frac{N'}{2} \right)^2 + \left(\frac{L'}{2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$d = -\Gamma_{11}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) = -\frac{L'}{2} \left(\frac{N'}{2} + \frac{L'}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{N''}{2} + \frac{N'^2}{4} - \frac{N'L'}{4} - \frac{L'}{r}$$

Verificad que: $R_{22} = -1 + e^{-L} \left[1 + \frac{r}{2} (N'-L') \right]$

$$\bullet R_{33} = \sin^2\theta R_{22}$$

Queremos resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} R_{00} &= 0 \\ R_{11} &= 0 \\ R_{22} &= 0 \\ R_{33} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Usando las dos primeras ecuaciones:

$$\frac{R_{11}}{e^L} + \frac{R_{00}}{e^N} = e^{-L} \left(\frac{N''}{2} + \frac{N'^2}{4} - \frac{N'L'}{4} - \frac{L'}{r} \right) + e^{-L} \left(-\frac{N''}{2} - \frac{N'^2}{4} - \frac{N'}{r} + \frac{N'L'}{4} \right) =$$

$$= -e^{-L} \left(\frac{L'+N'}{r} \right) = 0 \Rightarrow L'+N'=0 \Rightarrow \boxed{L' = -N'}$$

Si $(L+N)' = 0 \Rightarrow L+N = cte$

y además queremos que $e^L \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow L \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

$e^N \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow N \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow cte - L \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow cte = 0$

Es decir $\boxed{L = -N}$

De $R_{22} = 0$ tenemos $e^{-L} \left[1 + \frac{r}{2} \underbrace{(N'-L')}_{-2L'} \right] = 1 \Rightarrow e^{-L} (1 - rL') = 1$

cuya solución es $e^L = \frac{1}{1 - \frac{c}{r}}$

$\Rightarrow ds^2 = - \left(1 - \frac{c}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{c}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ Métrica de Schwarzschild $G = \Gamma_S$

A gran distancia (campo gravitatorio débil) la gravedad newtoniana simplificada:

$g_{00} \approx - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right)$ con $\Phi = - \frac{GM}{r}$ y M : masa total distrib. mat-ener

$-\frac{c}{r} = \frac{2\Phi}{c^2} = - \frac{2GM}{c^2 r} \Rightarrow \boxed{c = \frac{2GM}{c^2}} = \Gamma_S$ Radio de Schwarzschild

M contiene la masa de la estrella + la masa asociada a su campo gravitatorio
 Γ_S es tal que si toda la masa M está confinada dentro, nada (ni siquiera la luz) puede escapar del pozo gravitatorio \rightarrow colapso gravitacional \rightarrow singularidad \rightarrow agujero negro (no rotante). Los agujeros negros con rotación hay que estudiarlos con la métrica de Kerr, no la de Schwarzschild.

Γ_S es un resultado de la Relatividad General (RG.) ... aunque casualmente se llega a la misma conclusión haciendo, en aproximación newtoniana, la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz.

Buscad información sobre Γ_S , tipos de agujeros negros, fases finales de la vida de una estrella, etc ... y bucead en ella.

Para evitar singularidad en métrica, hacemos $\frac{\Gamma_S}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ y entonces la métrica ds^2 se reduce de nuevo (como para $r \rightarrow \infty$) a la de Minkowski \Rightarrow "vacío interno": la gravedad se desvanece en el centro de una distr. esférica.

26/4/07

5.2 Geodésicas de Schwarzschild - Órbitas

Vimos que $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$ $\lambda \equiv$ parámetro de la curva

o también $\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu k^\nu k^\sigma = 0$ si usamos $k^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ (tangente a la geodésica)
 se desplaza paralelamente a curva

podemos usar notación en N, L
 o su traducción a Γ_s que ya conocemos
 $e^N = 1 - \frac{\Gamma_s}{r}$; $N = \ln(1 - \frac{\Gamma_s}{r})$; $N' = \frac{\Gamma_s/r^2}{1 - \Gamma_s/r} = -L'$

Ecuaciones para las geodésicas:

$$\frac{dk^0}{d\lambda} + N' k^0 k^r = 0$$

$$\frac{dk^r}{d\lambda} + \frac{N'}{2} e^{N-L} (k^0)^2 + \frac{L'}{2} (k^r)^2 - r e^{-L} (k^\theta)^2 - r \sin^2 \theta e^{-L} (k^\varphi)^2 = 0$$

$$\frac{dk^\theta}{d\lambda} + \frac{2}{r} k^r k^\theta - \sin \theta \cos \theta (k^\varphi)^2 = 0$$

$$\frac{dk^\varphi}{d\lambda} + \frac{2}{r} k^r k^\varphi + 2 \cot \theta k^\theta k^\varphi = 0$$

Mano intervenido:
 $\Gamma_{0,1}^0$
 $\Gamma_{0,0}^1, \Gamma_{1,1}^1, \Gamma_{2,2}^1, \Gamma_{3,3}^1$
 $\Gamma_{2,1}^2, \Gamma_{3,3}^2$
 $\Gamma_{4,3}^3, \Gamma_{2,3}^3$

Para empezar, podemos girar los ejes de tal forma que en el instante inicial:
 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ partícula en plano ecuatorial $\Rightarrow \left. \frac{d\theta}{d\lambda} \right|_0 = 0$, es decir, $k^\theta|_0 = 0$

La tercera ecuación queda $\left. \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} \right|_0 = 0 \Rightarrow$ movimiento confinado al plano ecuatorial

\Rightarrow sin pérdida de generalidad (sim. esf.) $\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$, constante del movimiento
 y las ecuaciones restantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dk^0}{d\lambda} - L' k^0 k^r &= 0 \\ \frac{dk^r}{d\lambda} - \frac{L'}{2} e^{-2L} (k^0)^2 + \frac{L'}{2} (k^r)^2 - r e^{-L} (k^\varphi)^2 &= 0 \\ \frac{dk^\varphi}{d\lambda} + \frac{2}{r} k^r k^\varphi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

5.3 Tests clásicos de la R.G.

- Desviación de la luz
- Precesión de los perihelios
- Desplazamiento al rojo gravitacional

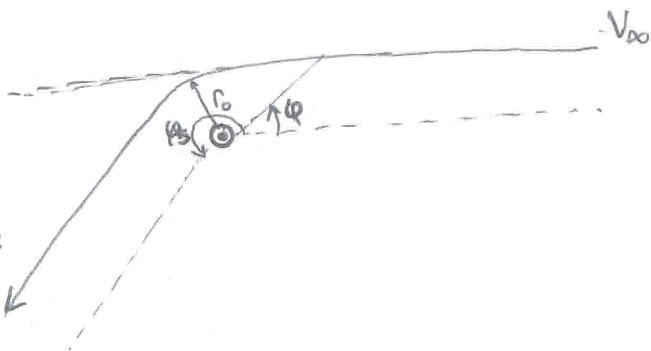
5.3.1 Desviación de la luz

Se lanza partícula con velocidad V_{∞}

$r_0 \equiv$ máximo acercamiento al origen

Eje φ tal que $\varphi_{\infty} = 0$

Con estos datos podemos poner J y E como:



$$\infty) -E = e^{-\frac{1}{r}} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - e^{-\frac{1}{r}} = V_{\infty}^2 - 1$$

$$E = 1 - V_{\infty}^2 \quad \text{y para un fotón} \quad V_{\infty} = 1 \Rightarrow E = 0$$

$$r_0) -E = e^{-\frac{1}{r_0}} \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2}{r_0^2} - e^{-\frac{1}{r_0}} \Rightarrow \frac{J^2}{r_0^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right)^{-1} = - (1 - V_{\infty}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J^2 = \left[\left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right)^{-1} - 1 + V_{\infty}^2 \right] r_0^2 \quad \text{y la forma de la órbita será:}$$

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^4}{J^2} - \frac{E e^{-\frac{1}{r}} r^4}{J^2} - e^{-\frac{1}{r}} r^2}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{J^{-2} [1 - E(1 - r_s u)] - u^2(1 - r_s u)}} \quad \left(u \equiv \frac{1}{r} \right)$$

El ángulo de salida será $\varphi_s = 2\varphi(r_0)$ y la desviación $\delta \equiv 2\varphi(r_0) - \pi$

$$\pi + \delta = 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{J^{-2} - u^2(1 - r_s u)}} = 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right) r_0^{-2} - u^2(1 - r_s u)}} =$$

para fotón
 $E=0$

$$= 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1 - r_s u_0) u_0^2 - (1 - r_s u) u^2}}$$

Podemos aproximar $r_s u_0 \ll 1$ y $r_s u \ll 1$ ($r_s^{\odot} \sim 3 \text{ km}$)

$$\pi + \delta \approx 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \left[1 + \frac{r_s}{2} \frac{u_0^3 - u^3}{u_0^2 - u^2} \right] \approx 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \left[1 + \frac{r_s}{2} \frac{u_0^2 + u^2 + u_0 u}{u_0 + u} \right] \approx$$

$$\approx 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \left[1 + \frac{r_s}{2} \left(u + \frac{u_0^2}{u + u_0} \right) \right] \quad \text{y estamos listos para integrar}$$

$$\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{u_0} \Big|_0^{u_0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{u_0} \frac{du u}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = -\sqrt{u_0^2 - u^2} \Big|_0^{u_0} = u_0$$

$$\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \frac{1}{u+u_0} = \frac{2\sqrt{-u+u_0}}{(-u_0-u_0)\sqrt{u+u_0}} \Big|_0^{u_0} = -\frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{u_0-u}{u+u_0}} \Big|_0^{u_0} = \frac{1}{u_0}$$

$$\Rightarrow \pi + \delta = \pi + r_s u_0 + r_s \frac{u_0^2}{u_0} = \pi + 2r_s u_0 \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{4GM}{r_0 c^2}}$$

Para un rayo que pase rozando la superficie del sol

$$\delta_0 = 4 \frac{GM_0}{R_0 c^2} = 1.75''$$

Un cálculo newtoniano da la mitad.

¡ El valor medido por Eddington, Davidson, Dyson en eclipse 1919 es $1.98 \pm 0.16!$

Un rayo de luz que pase cerca del sol también se retrasa por efectos grav. Usando la ecuación para $\frac{dr}{dt}$ y para fotones tenemos:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^3 \frac{J^2}{r^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 = 0 \quad \text{y podemos calcular el tiempo desde } r_0 \text{ a } r$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_0}\right]^{1/2}} \quad \text{sin gravitación}$$

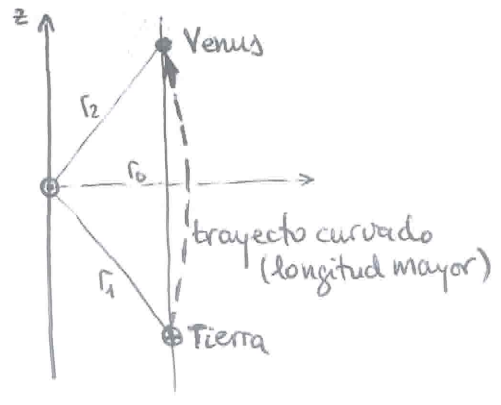
Desarrollando en r_s/r se llega a $t(r, r_0) = \sqrt{r^2 - r_0^2} + r_s \ln \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} + \frac{r_s}{2} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}$

Los relojes que miden el retraso están sometidos al campo gravitatorio del sol:

$$\Delta \Sigma_{\oplus} = \sqrt{-g_{00}(\oplus)} \Delta t$$

Las diferencias son del orden de ~ 100 μsec , medibles y verificadas por Mariner y Viking.

Con estas técnicas, las predicciones de Einstein se han confirmado con una precisión del 0.1%.



5.3.2 Precesión de los perihelios

7/5/07

Usemos la métrica de Schwarzschild para estudiar, ahora, la forma de las órbitas ligadas \rightarrow movimiento planetario.

$$-E = e^L \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - e^L \quad \left\{ \begin{array}{l} -E = (1-r_s u)^{-1} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 J^2 + J^2 u^2 - (1-r_s u)^{-1}; \\ \text{Despejando: } \frac{du}{d\varphi} = \pm \sqrt{-\frac{E}{J^2} (1-r_s u) - u^2 (1-r_s u) + J^{-2}} \end{array} \right.$$

$$r = 1/u; \quad dr = -\frac{du}{u^2}$$

$$e^L = (1-r_s/r)^{-1}$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{J}{r^2} = -\frac{du}{d\varphi} J$$

Derivando de nuevo respecto a φ :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\dots}} \right) \left[\frac{E r_s}{J^2} \frac{du}{d\varphi} - 2u \frac{du}{d\varphi} (1-r_s u) + u^2 r_s \frac{du}{d\varphi} \right] = \frac{1}{2} \frac{E}{J^2} r_s - u + r_s u^2 + \frac{1}{2} r_s u^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u}_{\text{newtoniano}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{E}{J^2} r_s - \frac{3}{2} r_s u^2}_{\text{corrección relativista}} = 0 \quad \text{Movimiento planetario}$$

($3GMu^2$ muy pequeño)

Comparemos 2º y 4º términos para el caso más extremo del sistema solar (Mercurio):

$$\frac{3GMu^2}{u} = 3GMu \sim \frac{GM_0}{rc^2} \sim 10^{-8}$$

La solución newtoniana era $u = \frac{1}{2} \frac{E}{J^2} r_s [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]$ elipse
 e = excentricidad
 φ_0 = perihelio

Podemos usar el método de aproximaciones sucesivas, metiendo esta "u" en el término relativista:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{2} \frac{E}{J^2} r_s - \frac{3}{2} r_s \left(\frac{E^2 r_s^2}{4J^4} \left[1 + \overset{0}{e^2} \cos^2(\varphi - \varphi_0) + 2e \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \right) = 0$$

constante sin efectos observables órbita quasicircular

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{2} \frac{E}{J^2} r_s - \frac{3}{4} \frac{r_s^3 E^2}{J^4} e \cos(\varphi - \varphi_0) = 0 \quad \text{oscilador armónico forzado}$$

cuya solución es: $u = \frac{1}{2} \frac{E r_s}{J^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)) + \frac{3}{8} \frac{e r_s^3 E^2}{J^4} \varphi \sin(\varphi - \varphi_0) \approx$

$$\approx \frac{1}{2} \frac{E r_s}{J^2} [1 + e \cos \psi] \quad \text{con } \psi = \varphi - \varphi_0 - \underbrace{\frac{3(GM)^2 E}{J^2} \varphi}_{\text{pequeño}} \quad \text{ELIPSE CON PRECESIÓN}$$

Veamos cómo ha de variar φ para que el argumento Ψ cambie de 2π .

$$\Delta\Psi = \Delta\varphi - \frac{3GM^2E}{J^2} \Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{3GM^2E}{J^2}\right)^{-1} \approx 2\pi \left(1 + \frac{3GM^2E}{J^2}\right)$$

$$r_s = 2GM$$

Luego la distancia angular entre un perihelio y el siguiente es mayor que 2π , siendo el exceso $6\pi \frac{(GM)^2 E}{J^2}$ por cada órbita.

Para Mercurio, se había medido un avance del perihelio de $5600''/\text{siglo}$. De éstos, todos menos $43.03''/\text{siglo}$ se explican con efectos Newtonianos (momento cuadrupolar del Sol, ...) y perturbaciones de los otros planetas. Einstein explicó exactamente con la R.G. los $43.03''$ que faltaban.

5.3.3 Desplazamiento al rojo gravitacional

Otra consecuencia del hecho de que el tiempo se dilate allí donde haya un ^{mayor} potencial gravitacional (el reloj corre más despacio = la frecuencia de una señal luminosa cambia).

Ej.: Emisor y receptor separados una cierta distancia en un campo gravitatorio. Emisor manda señales cada segundo de su tiempo propio $d\tau_e$ y el receptor las recibe cada $d\tau_o$ segundos del suyo. ¿Qué relación hay entre ambos tiempos propios $d\tau_e, d\tau_o$?

Si nos montamos en la señal, mediremos un intervalo entre dos salidas consecutivas de:

$$dt = \gamma_1 d\tau_e$$

$$\text{con } \gamma_1 = \left(1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2\right)^{-1/2}$$

v_1 = velocidad salida de señal

y entre dos llegadas consecutivas:

$$dt = \gamma_2 d\tau_o$$

v_2 = " llegada de señal

Ambos dt son iguales porque las líneas de mundo de las señales tienen la misma forma, sólo están desplazadas en el tiempo.

$$\frac{d\tau_o}{d\tau_e} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{c^2} \right) \approx 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}. \text{ Busquemos evidencia experimental:}$$

En espacio ~~curvo~~ curvo, un reloj en reposo ($dr=d\theta=d\varphi=0$) da $d\tau^2 = g_{00} dt^2$
 es decir $d\tau \leq dt$.
reloj a $r \rightarrow \infty$

Si tenemos dos relojes en posiciones diferentes (suelo y techo, p. ej.):

$$\left. \begin{aligned} d\tau_1 &= \sqrt{g_{00}(1)} dt \\ d\tau_2 &= \sqrt{g_{00}(2)} dt \end{aligned} \right\} \frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(2)}{g_{00}(1)}} = \frac{v_1}{v_2}$$

Normalmente los astrónomos utilizamos $z \equiv \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}$ ó $\nu_e \equiv \nu_0(1+z)$.

Entonces: $1+z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \sqrt{\frac{g_{00}(0)}{g_{00}(e)}}$

y en la aproximación lineal $g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$, con $\Phi = -\frac{GM}{r}$:

$$1+z \approx \sqrt{\frac{1 + \frac{2\Phi_0}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi_e}{c^2}}} \approx \sqrt{1 + 2\frac{\Delta\Phi}{c^2}} \quad \text{DESPLAZAMIENTO AL ROJO GRAVITACIONAL}$$

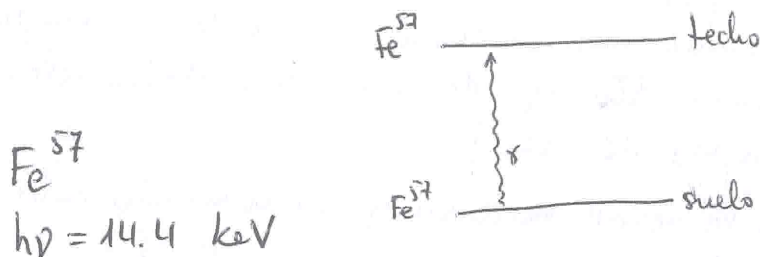
• Comprobaciones experimentales:

- líneas de emisión en la superficie del Sol

- Pound et al. con efecto Mössbauer (1960-4)

predicción: $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 4.92 \times 10^{-15}$; medida: $(0.997 \pm 0.008) \times$ predicción

• Otros tipos de "redshift": Doppler y cosmológico.



Efecto Mössbauer en red cristalina: el fotón sale con $E = h\nu - \epsilon$ si no hubiera z gravitacional, habría absorción resonante o en el techo (... pero si lo hay). Hace falta compensarlo con un desplazamiento al azul (pej. mediante Doppler, acercando el techo hacia el suelo), lo que demuestra la existencia del z gravitacional.

• línea emitida en superficie solar y observada en Tierra

$$r_0 = 147 \times 10^{11} \text{ cm}; \quad r_e = R_0 = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$z+1 = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_0}}{1 - \frac{2GM}{r_e}}}; \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \approx 1 + 2 \times 10^{-6} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_0} = 1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_e}\right)^{-1} \approx 2 \times 10^{-6}$$

• línea emitida en enana blanca con $M_* = 1M_\odot$ y $R_* = \frac{R_\odot}{100}$:

r_0 podemos poner la misma o $r_0 \rightarrow \infty$

$$r_e = \frac{R_\odot}{100} \therefore \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ más fácilmente medible}$$

5.4 Agujeros negros

- Expliquemos un poco más las singularidades de la solución de Schwarzschild, el porqué del colapso irreversible cuando toda la masa M queda al interior de $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, cómo varía la densidad de un agujero negro (AN) con su masa M , los efectos de marea y el efecto de ^{la} rotación.

La métrica $ds^2 = -(1 - r_s/r) dt^2 + (1 - r_s/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ tiene, aparentemente, dos singularidades:

i) $r = r_s \Rightarrow \begin{cases} g_{00} = 0 \\ g_{rr} = \infty \end{cases}$ } aunque esta singularidad puede eliminarse con un cambio de coordenadas \Rightarrow no es sing. física (la física sigue funcionando al atravesarla; simplemente, un observador exterior deja de tener información del interior)

ii) $r = 0 \Rightarrow \begin{cases} g_{00} = \infty \\ g_{rr} = 0 \end{cases}$ } aquí sí que vemos alguna magnitud física hacerse singular (p.ej. la fuerza de marea) \Rightarrow sí es física

- Recordemos la secuencia Φ, Φ', Φ'' :

$\bar{\Phi} = -\frac{GM}{r}$ <p>POTENCIAL GRAV (definido salvo constantes)</p> <p>- sin sentido físico directo</p> <p>$g_{\mu\nu}$ campo</p>	$\Phi' = \frac{d\Phi}{dr} = g = \frac{GM}{r^2}$ <p>ACERCA FUERZAS GRAVITATORIAS (no se siente en sistema de coordenadas en caída libre localmente)</p> <p>- geodésicas -</p> <p>$g_{\mu\nu}, \alpha$ fuerzas</p>	$\Phi'' = \frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{dg}{dr} = -2 \frac{GM}{r^3}$ <p>FUERZAS DE MAREA (manera de detectar campo grav. mediante <u>cuerpo extenso</u>)</p> <p>- no desconectable - ecs. movimiento</p> <p>$g_{\mu\nu}, \alpha/\beta$ marea</p>
---	--	--

- Fuerzas de marea $\propto \frac{1}{r^3}$ importantes para $r \rightarrow 0$

(Fuerza de gravedad $\propto \frac{1}{r^2}$)

¿Cuál es la diferencia entre la aceleración de la grav. en los pies y en la cabeza de un astronauta en el borde de un AN de tipo solar?

$$\Delta g = \frac{dg}{dr} \Delta r = -2 \frac{GM}{r^3} \Delta r = \dots = -2 \times 10^{12} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \approx 2 \times 10^9 g_{\oplus} !$$

con $\Delta r = 2 \text{ m}$, $M = 1 M_{\odot}$, $r = r_s = \frac{2GM}{c^2} = 3 \text{ km}$

• Densidad de un AN

Para un AN solar: $\rho_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{AN}} = \frac{2 \times 10^{33} \text{ g}}{\frac{4}{3} \pi (3 \times 10^5 \text{ cm})^3} \approx 10^{17} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} > \rho_{\text{nuclear}} \approx 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Para un AN supermasivo de $10^8 M_{\odot}$: $\rho_{10^8 M_{\odot}}^{\text{AN}} \approx 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \sim \rho_{\text{H}_2\text{O}}$

En general, $\rho^{\text{AN}} \propto \frac{M}{r_s^3}$ y $r_s \propto M \Rightarrow \boxed{\rho^{\text{AN}} \propto \frac{1}{M^2}}$; $\rho \approx 10^{17} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2}$

5.4.1 Singularidades en Agujero Negro de Schwarzschild

• SUPERFICIES DE REDSHIFT INFINITO (Z_{∞})

$r = r_s$ es superficie Z_{∞} porque un reloj en reposo en r_s medirá:

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt \quad \text{y, por tanto, un observador}$$

\swarrow reloj en $r = \infty$

suficientemente lejano ($r \rightarrow \infty$) mide un tiempo $dt = \frac{d\tau}{0} = \infty$ entre dos máximos de una señal luminosa ($\lambda = \infty, \nu = 0$).

En $r = r_s$ las fuerzas de marea pueden ser enormes (ya visto) pero son finitas, no hay singularidad física. La aparente sing. es fruto de ~~la~~ la elección de coordenadas (coords t, r, θ, ϕ de Schwarzschild no funcionan en este punto, pero las geodésicas sí: se podría ver que $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ son todas finitas en coords. geod.). (Es como la sing. aparente $\rho = \frac{1}{w}$ en el caso del sistema de coordenadas rotante t', ρ, ϕ, z' en espacio-tiempo plano).

\Rightarrow las superficies de redshift infinito aparecen por la elección de coordenadas

• ZONA $0 < r < r_s$

$g_{00} = -(1 - \frac{r_s}{r})$ cambia de signo (pasa a ser positivo) \Rightarrow "espacial"

$g_{rr} = (1 - \frac{r_s}{r})^{-1}$ " " " (pasa a ser negativo) \Rightarrow "temporal"

El espacio y el tiempo cambian papeles (ojo: lo que antes era estático ahora deja de serlo; depender de r significa depender del tiempo)

• SINGULARIDAD $r = 0$

Aquí la fuerza de marea $\propto \frac{1}{r^3}$ se hace infinita \Rightarrow sing. física

Se llega a esta singularidad en $r = 0$ para todo $t \Rightarrow$ en un instante dado ($r = 0$) en todo el espacio ($\forall t$).

• HORIZONTES DE SUCESOS

$r = r_s$ es horizonte de sucesos porque desde el interior no se puede enviar información al exterior (al revés, sí) y esto no depende de la elección de sist. de coordenadas (es algo independiente del estado de movimiento de los observadores). Es lo que define a un agujero negro (región del E-T encerrada en un horizonte de sucesos).

Consideremos señal luminosa $ds^2 = 0$ propagándose en dirección radial ($d\theta = d\phi = 0$) $\left\{ \begin{aligned} &-(1 - \frac{r_s}{r}) dt^2 + (1 - \frac{r_s}{r})^{-1} dr^2 = 0 \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow \frac{dr^2}{dt^2} = (1 - \frac{r_s}{r})^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \pm (1 - \frac{r_s}{r})}$ velocidad de la señal con respecto a las coordenadas (t, r) y no cruza el horizonte.

La velocidad tiende a cero cuando $r \rightarrow r_s$ y no cruza el horizonte.

Los correspondientes conos (futuros) de luz son:

Ej.: $r = \frac{3}{2} r_s \Rightarrow \pm (1 - \frac{r_s}{r}) = \pm (1 - \frac{2}{3}) = \pm \frac{1}{3}$

$\alpha = \arctg \frac{1}{3} \approx 18^\circ$

• $r \rightarrow \infty \Rightarrow \pm (1 - \frac{r_s}{r}) = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

• $r = r_s \Rightarrow \pm (1 - \frac{r_s}{r}) = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$

- Cualquier señal ^{emitida} en zona $r < r_s$ cae sin remedio a $r = 0$

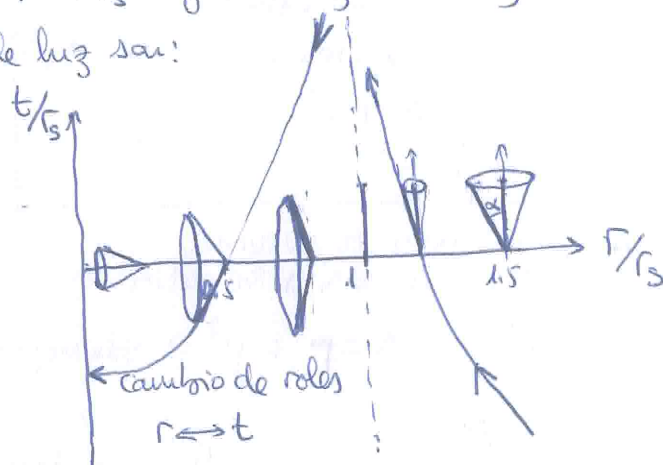
- Pero una señal exterior si puede pasar al interior (aunque el obs. exterior ^{lejanos} nunca la vea atravesar el horizonte $r = r_s$).

Para obs. en caída libre cerca de r_s no hay dilatación del tiempo (la velocidad de la señal sigue siendo c respecto a él). En cuanto el astronauta cruza r_s , tanto las señales que emite como él mismo caen a $r = 0$, puesto que todas ~~sus~~ líneas de mundo acaban en $r = 0$ ($\alpha = 180^\circ$). Aparte de que, como vimos, la fuerza de marea le destruirá.

Igualmente, si una estrella (esférica) se llega a comprimir dentro de r_s , cada una de sus partículas y fotones sufrirá la misma suerte que nuestro astronauta y sus señales luminosas \Rightarrow COLAPSO GRAVITATORIO INEVITABLE

El tiempo para colapsar de r_0 a $r = 0$ es $\Delta t = \frac{\pi}{2} r_s (\frac{r_0}{r_s})^{3/2}$

para $r_0 = r_s$, $\Delta t \sim \frac{r_s}{c} (\sim 10^{-5} s$ en un agujero negro solar)



5.4.2 Agujero Negro de Kerr (rotante)

Métrica de Kerr:

$$g_{00} = - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta$$

$$g_{0\phi} = -2a \frac{2GM r \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad (\text{rotación})$$

estacionaria pero no estática
axialmente simétrica ($\phi \rightarrow \phi + \Delta\phi$)

$$\Delta \equiv r^2 - 2 \frac{GM r}{c^2} + a^2 \quad a = \frac{J}{mc}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$a = \frac{J}{Mc} \quad \text{MOMENTO ANGULAR POR UNIDAD DE MASA}$$

para $a=0$, $\Delta = \rho^2 = r^2 \Rightarrow$ Schwarzschild

• caso $a < \frac{GM}{c^2}$

