

0.

1. ÓRBITAS CIRCULARES

Estudiamos como ejemplo las estrellas binarias y los cuerpos del sistema solar en la aproximación newtoniana (clásico) de la gravedad y en la aproximación de órbitas circulares. Cuando generalicemos a órbitas elípticas, llegaremos a las leyes de Kepler.

Motivación: Estudiando el problema de dos cuerpos Sol/Tierra podemos inferir la masa del Sol. Estudiando estrellas binarias podemos inferir sus masas y calcular la energía que las liga.

ESTRELLAS BINARIAS

Más del 50% de las estrellas se encuentran en sistemas binarios o múltiples; las estrellas aisladas son más la excepción que la regla. Existen tres tipos principales de estrellas binarias (atendiendo a criterios diferentes, por lo que una binaria puede pertenecer a más de una de estas categorías observacionales):

VISUALES: Se observa la órbita de ambas estrellas ($0^\circ < i < 90^\circ$), siendo i la inclinación del plano de la órbita con respecto al plano del cielo.

ECLIPSANTES: Se observa el sistema de canto ($i = 90^\circ$) de manera que las estrellas se eclipsan. La curva de intensidad de luz muestra dos tipos de mínimo (primario, en el momento en que la más brillante es eclipsada total o parcialmente; secundario, cuando la estrella eclipsada es la menos brillante). La forma del mínimo da información sobre el tamaño relativo de las dos estrellas. Algol (β Persei) es el caso más conocido.

ESPECTROSCÓPICAS: El desplazamiento Doppler periódico (consecutivamente hacia el rojo y el azul) de las líneas espectrales de una estrella delata su movimiento orbital en torno al centro de masas del sistema.

CÁLCULO DE LAS MASAS

Estudiamos un sistema de dos masas orbitando respecto del centro de masas (cdm) común del sistema. El cdm es el punto en el que se pueden considerar aplicadas todas las fuerzas exteriores al sistema y ninguna fuerza interna entre las dos masas componentes le afecta. La definición de cdm exige que $m_1 r_1 = m_2 r_2$ y que ambas masas orbiten con el mismo período

P respecto del cdm: $P = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2}$, por lo que tenemos las igualdades: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Es decir, la más cercana al cdm es la que orbita más lentamente y es la más masiva.

Usamos ahora la mecánica newtoniana para igualar la fuerza gravitatoria ejercida sobre la masa 1 al producto de su masa por la aceleración normal $a_{N,1} = \frac{v_1^2}{r_1}$ (movimiento circular):

$m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$. Substituyendo $v_1 = \frac{2\pi r_1}{P}$ y llamando $R = r_1 + r_2 = r_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$, tenemos:

$$\frac{4\pi^2 R^3}{G} = (m_1 + m_2) P^2, \text{ que no es más que una versión de}$$

la 3ª Ley de Kepler.

P se conoce en todos los tipos de binarias y R se puede conocer en el caso de las binarias visuales midiendo su separación angular theta y la distancia (por el método de la paralaje):

$$R(AU) = \theta(rad) d(AU) = \frac{\theta''}{206265} 206265 d(pc) = \frac{\theta''}{\pi''} .$$

En este punto ya podemos calcular la masa del Sol, haciendo $m_1 + m_2 \approx m_1 = M_{sol} = \frac{4\pi^2 R^3}{G P^2}$.

En unidades cgs $G = 6.67 \times 10^{-8}$, $P=1 \text{ año} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$, $R=1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13}$ y, por tanto, $M_{sol} = 2 \times 10^{33} \text{ g}$.

Habitualmente se usa la ecuación de las masas en las unidades del sistema Sol/Tierra ($R=1 \text{ AU}$, $P=1 \text{ año}$) para que las demás constantes de la ecuación desaparezcan, quedando:

$$\left(\frac{R}{AU}\right)^3 = \left(\frac{m_1 + m_2}{M_{sol}}\right) \left(\frac{P}{años}\right)^2 .$$

Pero a menudo, como es el caso de las binarias, lo que se conocen son las velocidades de las estrellas. En ese caso: $v_1 + v_2 = \frac{2\pi(r_1 + r_2)}{P} = \frac{2\pi R}{P}$, de manera que podemos despejar R

y substituirlo en la ecuación de las masas: $\frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^3 = m_1 + m_2$.

Finalmente, introduzcamos la inclinación de la órbita respecto del plano del cielo puesto que lo que mide el efecto Doppler son las velocidades radiales $v_r = v \sin(i)$. Así pues la ecuación de las masas queda:

$$\frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1r} + v_{2r})^3}{\sin^3(i)} = m_1 + m_2 .$$

Si no conocemos la inclinación de la órbita, la expresión $\frac{P}{2\pi G} (v_{1r} + v_{2r})^3 \leq m_1 + m_2$ supone un límite inferior a la suma de las masas (si la binaria es eclipsante, $i=90^\circ$, tenemos la igualdad; en los demás casos la masa es mayor que la obtenida a partir de las velocidades radiales.

QQ Supongamos un sistema binario de período $P=10$ años en el que se han medido las velocidades radiales: 10 km/s y 20 km/s . ¿Cuánto valen las masas de las dos estrellas si: a) son eclipsantes; b) $i=45^\circ$?

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1r} + v_{2r})^3}{\sin^3(i)} = \frac{10.2 M_{sol}}{\sin^3(i)}$$

a) $m_1 + m_2 = 10.2 M_{sol}$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}, \text{ quedando } m_1=6.8 \text{ Msol y } m_2=3.4 \text{ Msol.}$$

b) Las masas quedan multiplicadas por un factor $\frac{1}{\sin^3(45^\circ)} = 2.83$, es decir, $m_1=19.2$ Msol y $m_2=9.5$ Msol.

Si sólo se conoce la velocidad radial de una de las estrellas, hay que eliminar la otra de la ecuación haciendo $v_{2r} = \frac{v_{1r} m_1}{m_2}$ y por tanto: $\frac{m_2^3 \sin^3(i)}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{P}{2\pi G} v_{1r}^3$. El miembro de la izquierda se conoce como función de masas (es todo lo que podemos conocer, no podemos separar los valores de las dos masas).

ENERGÍA DE ENLACE DEL SISTEMA

La energía total del sistema es la suma de las cinéticas y de la potencial (colocar la primera masa es "gratis" pues no hay campo; colocar la segunda supone traerla desde el infinito, donde el campo creado por la primera es nulo hasta una distancia R de ésta):

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G \frac{m_1 m_2}{R}.$$

Haciendo uso de $m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$ y de $\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$ obtenemos:

$$E = -\frac{1}{2} G \frac{m_1 m_2}{R}.$$

El hecho de que el total sea negativo nos indica que el sistema está ligado gravitacionalmente (hace falta comunicarle esta energía para romper el enlace).

QQ Calcula esta energía para dos estrellas de una masa solar separadas 100 UA.

2. ÓRBITAS ELÍPTICAS

En un sistema binario, el centro de masas estará en un foco de la elipse. El punto de la órbita más lejano a este foco será el apoastro y el más cercano el periaastro.

Una circunferencia es una elipse de excentricidad nula ($r=a$).

GEOMETRÍA DE UNA ELIPSE

Lugar geométrico de los puntos cuya suma a dos focos fijos es constante: $r+r'=2a$

Semiejes mayor y menor: a , b .

Excentricidad: $e=2f/2a=f/a$ donde $2f$ es la distancia interfocal.

$$\text{En los puntos } r=r'=a: \quad b^2=a^2-(ae)^2=a^2(1-e^2)$$

En los extremos del semieje mayor:

$$r_p=a(1-e)$$

$$r_a=a(1+e)$$

Elipse en coordenadas polares: $r'^2=r^2+(2ae)^2+2r(2ae)\cos\theta$ (ley de los cosenos) junto con

$$r+r'=2a \quad \text{nos dan: } r=\frac{a(1-e)^2}{1+e\cos\theta}.$$

MOMENTO ANGULAR

Las fuerzas gravitacionales mutuas van en la dirección del cdm común, por lo que no existe par de fuerzas sobre el cdm y, por tanto, el momento angular $L=mv r \sin\phi$ respecto del mismo se conserva (ϕ es el ángulo formado por el vector velocidad y el vector posición respecto del foco). Geométricamente, el área barrida por el vector posición en un intervalo dt es un triángulo de base r y altura $v dt \sin\phi$. Por tanto, el área barrida por unidad de tiempo es:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r v \sin\phi=\frac{1}{2}\frac{L}{m}=\text{constante}, \quad \text{que constituye la 2ª Ley de Kepler.}$$

Como consecuencia, los objetos se mueven más deprisa cuando se acercan al foco.

QQ Comprobar que la suma invierno+primavera es más corta que la suma verano+otoño en el hemisferio Norte.

ENERGÍA DE ÓRBITAS ELÍPTICAS

Como vimos anteriormente, la energía total del sistema binario es

$E=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-G\frac{m_1m_2}{R}$, donde las velocidades son relativas al cdm. La velocidad relativa de ambos cuerpos es, por ir siempre en sentidos opuestos, $v=v_1+v_2$. Podemos escribir $m_1+m_2=m_2v_2/v_1+m_2v_1/v_1=m_2v/v_1$, es decir, $v_1=\frac{m_2v}{m_1+m_2}$, e igualmente

$v_2=\frac{m_1v}{m_1+m_2}$, que introducidas en la ecuación de la energía nos dan:

$$E=m_1m_2\left(\frac{v^2}{2(m_1+m_2)}-\frac{G}{R}\right).$$

La conservación de momento angular nos proporciona una relación entre las velocidades en el apoastro y en el periaastro (los elegimos porque en ellos $\sin\phi=1$):

$m v_a r_a = m v_p r_p$ implica $a(1+e)v_a = a(1-e)v_p$ y de ahí:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} .$$

La conservación de energía nos aporta una segunda relación entre dichas velocidades:

$$\left(\frac{v_a^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{G}{a(1+e)} \right) = \left(\frac{v_p^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{G}{a(1-e)} \right) .$$

QQ Reordenar términos para llegar a: $v_a^2 = \left[\frac{G(m_1+m_2)}{a} \right] \frac{1-e}{1+e}$, $v_p^2 = \left[\frac{G(m_1+m_2)}{a} \right] \frac{1+e}{1-e}$; poner

una de estas dos velocidades en $E = m_1 m_2 \left(\frac{v^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{G}{R} \right)$ para obtener $E = \frac{-G m_1 m_2}{2a}$ y

substituir E para finalmente obtener: $v^2 = G(m_1+m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$.

Es conveniente aquí recordar varias diferencias importantes con el caso circular:

- la velocidad en una órbita elíptica no es constante ni tampoco perpendicular al vector de posición (excepto en peri- y apoastro);
- la curva de velocidad radial no es un senoide.

Cuando observamos una órbita elíptica, ¿cómo podemos saber si el plano de la órbita está inclinado o no (al fin y al cabo la proyección de una elipse es otra elipse)? Por la posición del centro de masas. La proyección del foco no es un foco real de la órbita proyectada. El desplazamiento del foco es mayor cuanto mayor es la inclinación. Generalmente, como no se conoce la posición del centro de masas, se usa un proceso iterativo: probamos una posición para el centro de masas e intentamos reproducir la órbita proyectada hasta que acertamos.

TAMAÑOS Y MASAS ESTELARES

El radio del Sol se puede calcular midiendo su radio angular ($32' / 2 = 16'$) y conociendo su distancia (1UA= 1.5×10^8 km), lo que implica $R_{sol} = 6.96 \times 10^5$ km. El de otras estrellas se puede calcular mediante la relación $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Con las binarias eclipsantes, podemos usar la forma de la curva de luz para obtener información sobre su tamaño. En estrellas rotantes con alguna irregularidad en su superficie, el brillo de la estrella depende de si dichas irregularidades se encuentran frente al observador o en el lado no visible, por lo que podemos obtener su período de rotación P y a partir del ensanchamiento Doppler de sus líneas espectrales se puede obtener la velocidad de rotación v. El radio será, pues:

$$R = \frac{P}{2\pi} v .$$

Y existen otros métodos, como las ocultaciones por la luna.

Por otro lado, mediante el cálculo de masas en sistemas binarios se ha acumulado una cierta estadística sobre la masa típica de cada tipo (espectral) de estrella (desde las 0.2Msol de

una M5 hasta las 40Msol de una O5) en la secuencia principal. En ésta, existe una relación entre tamaño y temperatura: para una masa estelar dada, la temperatura y el tamaño vienen dados. Si la masa determina la temperatura y el tamaño, no es extraño que exista una relación entre masa y luminosidad, que es del tipo $\frac{L}{L_{sol}} = \left(\frac{M}{M_{sol}}\right)^\alpha$ con exponentes diferentes para tres rangos de masa (baja: 1.8; media:4.0; alta:2.8).