

---

# Introducción a la gravitación

---

1

# Fuerza de gravedad: contexto

ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA



macro

GRAVITATORIA, ELECTROMAG, FUERTE, DÉBIL  $\Rightarrow$  UNIFICACIÓN



micro

FÍSICA CUÁNTICA Y DE PARTÍCULAS

- Universal (toda forma de masa/energía)
- Sin apantallamiento (siempre positiva)
- Largo alcance (domina a gran escala)
- La más débil de las cuatro **QQ: calcula  $F_g / F_e$  entre dos protones**

En el Big Bang se unen las dos fronteras

# Gravedad y Relatividad General (RG)

Gravedad newtoniana  
(1686)

Fuerza instantánea

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Relatividad especial  
(1905)

No instantánea:

$$v \leq c$$

Relatividad General  
(1916)

Gravedad=Geometría

APLICACIONES:

- GPS
- Órbitas/navegación (ISS)
- Estrellas de neutrones (NS)
- Agujeros negros (BH)
- Cuásares (QSO)
- Cosmología, Big Bang

# Efectos relativistas en gravedad

- Importantes si  $\frac{GM}{rc^2} \sim 1$ 
  - En el universo temprano (gravedad cuántica, fluctuaciones, inflación)  
QQ Encuentra escala de Planck para  $l, t, E, \rho$  a partir de  $h, G, c$
  - En el universo presente
    - Tierra:  $10^{-9}$  (necesario en GPS)
    - Sol:  $10^{-6}$  (efecto apreciable en Mercurio)
    - NS: 0.1                      QQ WD: ?
    - BH: ?                         QQ Calcula cuándo  $v_{\text{escape}} > c$
- Ondas gravitacionales (arrugas del espacio-tiempo se propagan a  $c$ )  
Cualquier masa no esférica o en movimiento no rectilíneo las produce (*BH, NS mergers*)  
Difíciles de detectar (despl  $1:10^{20}$ ) pero sufren poca absorción (nos dejan llegar lejos)
- Cosmología (evolución del universo)  
Los primeros instantes fijaron: distribuciones actuales de materia a gran escala, materia/antimateria, densidades de materia, neutrinos y ondas gravitacionales, abundancias primitivas

---

# Geometría = Física

---

2

# Gravedad y geometría

- Galileo: Todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitatorio ( $\vec{g}$ ) uniforme.
- Experimentos:  $g_{TS}/g_{LS} \approx 1 \pm 10^{-13}$  QQ Anderson & Williams 2001 lunar laser ranging
- Propiedad de la gravedad: los cuerpos siguen una trayectoria única en diagrama E-T (mismas condiciones iniciales implican misma curva)
- Einstein: La gravedad es la geometría de la unión cuadridimensional de espacio y tiempo (el espacio-tiempo E-T), curvada por la presencia de materia. No es una fuerza instantánea.

# Geometrías no euclídeas

- Otras geometrías del espacio son posibles.

Suma ángulos de triángulo  $A+B+C \neq \pi$

QQ Gauss (69,85 y 107km)  $A+B+C - \pi = \frac{S_{tri}}{R_T^2} \left( \frac{GM_T}{c^2 R_T} \right)$

- Cuestión empírica. Se puede conocer la curvatura sin salirse a una dimensión superior

- Midiendo ángulos de un triángulo
- Midiendo radios y volúmenes de esferas

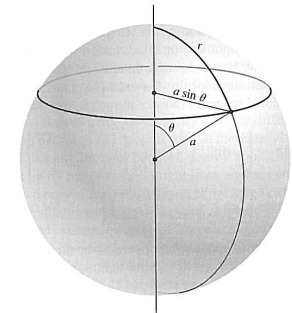


FIGURE 2.4 The relation of the circumference to the radius of a circle in the geometry of the surface of a sphere. A circle is the locus of points on the surface that are equidistant (as measured on the surface) from its center point. In this figure the North Pole has been chosen to coincide with the center of a circle that is a line of constant latitude labeled by  $\theta$ . The radius  $r$  is the distance from the North Pole to this latitude measured along any line of constant longitude.

Superficie 2D plana

2D curva: 2-esfera

3D curva: 3-esfera

Línea recta

Círculo máximo

Triángulo

3 círculos máximos

Círculo

L.g. puntos equidistantes de un centro

$$A+B+C=\pi$$

$$A+B+C=\pi+S_{tri}/a^2$$

$$C/r=2\pi$$

$$\frac{C}{r}=2\pi \frac{\text{sen}(r/a)}{r/a}$$

$$V=4\pi a^3 \left[ \frac{1}{2} \text{sen}^{-1} \left( \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{2a} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \right]$$

# Curvatura de una esfera

$$C = 2\pi r \quad (\text{plano})$$

$$C_1 = 2\pi k_1 = 2\pi R \operatorname{sen} \theta_1$$

$$r_1 = R \theta_1$$

$$\frac{C_1}{2\pi r_1} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\theta_1} < 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 < 2\pi r_1 \quad (\text{2-esfera})$$

$$\theta_1 + \phi_1 + \eta_1 = k_1 > \pi$$

$$\theta_2 + \phi_2 + \eta_2 = k_2 > \pi$$

$$k_2 < k_1$$

- Imposible dibujar paralelas en esfera
- Posibilidad de retornar al punto de origen: espacio cerrado

## QQ Triángulos en cilindro

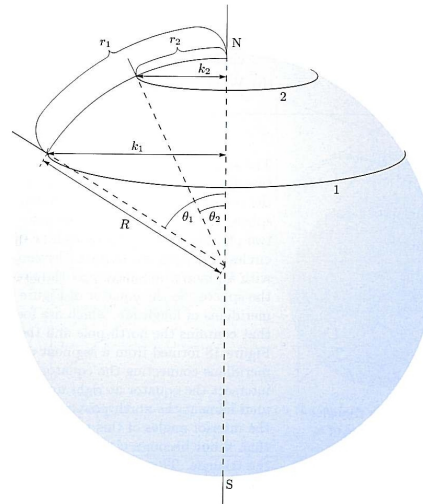


Figure 17 The relationship of circumference to radius of circles drawn on the surface of a sphere.

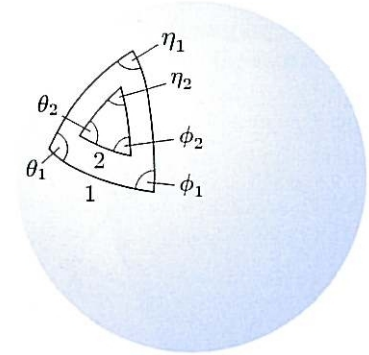


Figure 19 Two triangles drawn on the surface of a sphere.

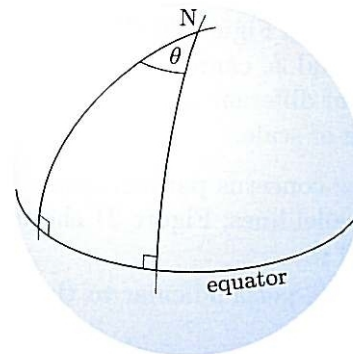


Figure 18 A triangle drawn on the surface of a sphere: the sum of the interior angles is greater than  $\pi$  radians.

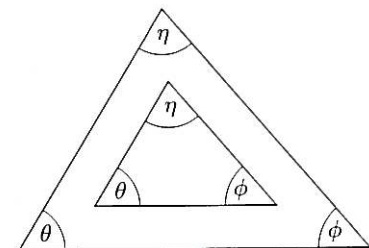


Figure 20 Similar triangles drawn in the plane.



# 3-curvatura de superficie 2D

- Plano:  $l \approx R_C \tilde{\theta}_C \approx R_C \theta_C \quad \theta_C > \theta_F$   
 $\Rightarrow l/R_C > l/R_F \Rightarrow 1/R_C > 1/R_F$

$\text{curv}(C) > \text{curv}(F)$

$k_x \equiv 1/R_x$  mide curvatura

- Superficie 2D curva: en el punto dado, buscar las líneas de máxima y mínima curvatura  $k \equiv k_{\max} k_{\min}$

Signo: negativo si centro en mismo lado que la punta de flecha de la normal (sentido arbitrario).

Curvatura de esfera, cilindro, cono

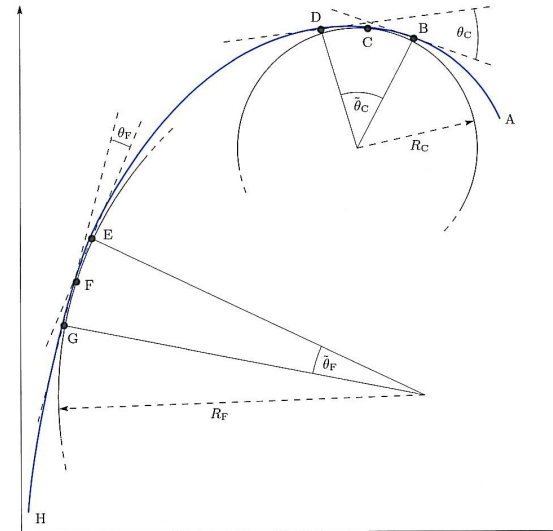


Figure 39 A curve ABCDEFGH drawn in the plane, and the approximating circles for the sections BCD and EFG.

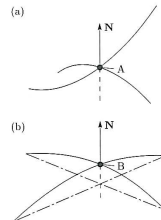


Figure 42 Curves of maximum and minimum curvature at a given point of the surfaces of Figure 41.

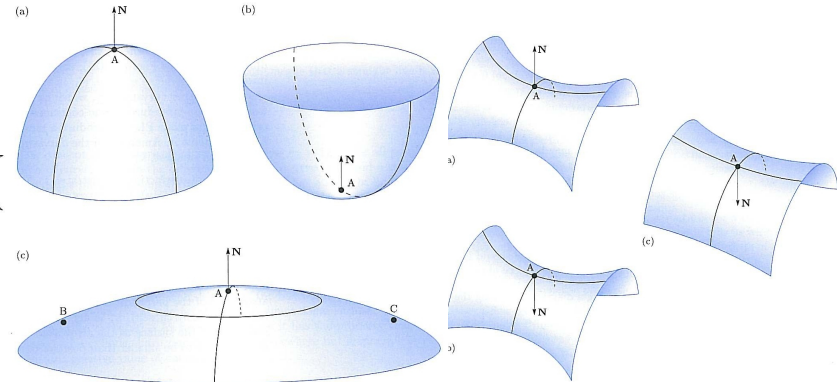


Figure 43 Surfaces of positive curvature.

Figure 44 Surfaces of negative curvature.

# Cómo describir una geometría

- Sumergiéndola en una euclídea de dimensión superior
- Axiomas
- Especificar distancia entre par de puntos.

## Geometría diferencial:

- Distancia a lo largo de camino (integral de camino)
- Definición de línea recta (mínima distancia)
- Medir ángulos como cocientes de distancias (arco/radio)
- Superficies y volúmenes (integrales dobles, triples)

Geometría se reduce a relaciones entre distancias y éstas a integrales de distancias entre puntos cercanos (elemento de línea)

- Elección de coordenadas en una misma geometría

Ej: distancia  $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\phi^2)}$

QQ medir C: una es difícil y la otra fácil

# Elemento de línea (ds)

- Escritura convencional  $ds^2 = dx^2 + dy^2$   
(en polares  $(dr = dx, r d\phi = dy)$ )

- Esfera con superficie 2D (radio a)

Distancia entre  $(\theta, \phi)$  y  $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$ :

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

QQ Calcula C/r

- Pero en RG tenemos que deducir las propiedades de la geometría a partir de ds (no al revés)

QQ Dado  $ds^2 = a^2 (d\theta^2 + f^2(\theta) d\phi^2)$ , ej:  $f(\theta) = \sin \theta (1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta)$

estudiar simetría  $\theta = \pi/2$ , circunferencia de líneas de theta constante, distancia de polo a polo

- ds invariante frente a elección de juego de coordenadas. Debemos poder pasar de uno a otro: transformación de coordenadas.

---

# Gravitación newtoniana

---

3

# Sistemas de referencia inerciales (SRI)

- SR: unos ejes y un reloj asociados a un observador
- La construcción de un conjunto de SRIs se basa en la 1ª ley de Newton: elegir una partícula libre (se mueve en línea recta con velocidad uniforme) como origen de tres ejes que se mueven con ella.
- Las leyes de la mecánica de Newton toman en ellos su forma más sencilla. Movimiento descrito por:  $x(t), y(t), z(t)$  según la 1ª ley:  $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$
- Rotación fija, traslación o movimiento uniforme resultan en SRIs equivalentes. Si hay movimiento de rotación o aceleración: SRNI (no inerciales), como en la superficie de la Tierra (fuerzas centrífugas, de Coriolis, ...).
- Las leyes de Newton suponen una métrica (espacio) y una noción de tiempo determinados:
  - línea recta como distancia más corta entre dos puntos del espacio 3D euclídeo (plano):  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
  - Tiempo: cualquier parámetro respecto al cual las posiciones de toda partícula libre cambian a ritmo constante. Absoluto: simultaneidad impuesta.
- SRIs: únicos sistemas que cubren todo el E y todo el T. Los demás, locales.

# Relaciones entre dos SRIs

- Relación entre posiciones en dos SRIs (S y S'):  $d, \phi, v$  constantes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desplazamiento

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rotación de ángulo fijo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Movimiento uniforme eje X

- Relación entre tiempos: dos sucesos simultáneos en S, ¿lo serán en S' ?  
Newton dice SÍ (tiempo absoluto y universal)
- Transformaciones galileanas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Principio de relatividad

- Experimentos idénticos en SRIs diferentes dan resultados idénticos. No puedes distinguir en qué SRI estás.
- Las tres leyes de la mecánica newtoniana lo obedecen.

QQ Prueba que  $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$  es invariante bajo transformaciones galileanas  
(hazlo con desplazamiento o rotación fija, derivando dos veces)

- Esto es así sólo porque la propia geometría del espacio euclídeo es invariante respecto a los desplazamiento, rotación de ángulo fijo y movimiento uniforme (geometría=gravedad).

QQ Comprueba que, con la rotación de ángulo fijo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

# Campo gravitatorio newtoniano

Ley de gravitación universal:

$$F_{A \rightarrow B}^G = G \frac{m_A m_B}{r_{BA}^2} \vec{u}_{BA} = -G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \vec{u}_{AB} = -F_{B \rightarrow A}^G = -m_B \frac{G m_A \vec{u}_{AB}}{r_{AB}^2} = -m_B \vec{\nabla} \phi_A(\vec{r}_B)$$

Potencial gravitatorio  
creado por la masa A

$$\phi_A(\vec{r}) = \frac{-G m_A}{|\vec{r} - \vec{r}_A|}$$

Principio de superposición

$$\phi(\vec{r}) = \begin{aligned} & - \sum_i \frac{G m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} && i \text{ masas discretas} \\ & - \int d^3 r' \frac{G \mu(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} && \text{distribución continua con} \\ & && \text{densidad de masa} \end{aligned}$$

Campo gravitatorio que deriva de un potencial:

$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \mu(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \mu(\vec{r})$$

Ecuación de campo  
newtoniano (~Poisson)

- El campo gravitatorio en el exterior de una distribución simétrica de masa sólo depende de su masa total.

QQ Deduce la 3ª ley de Kepler: órbita circular de radio R, período P alrededor de una masa M esférica.



# Relación Gravitación / Electrostática

TABLE 3.1 Newtonian Gravity and Electrostatics

	Newtonian Gravity	Electrostatics
Force between two sources	$\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r$	$\vec{F}_{\text{elec}} = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
Force derived from potential	$\vec{F}_{\text{grav}} = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}_B)$	$\vec{F}_{\text{elec}} = -q\vec{\nabla}\Phi_{\text{elec}}(\vec{x}_B)$
Potential outside a spherical source	$\Phi = -\frac{GM}{r}$	$\Phi_{\text{elec}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
Field equation for potential	$\nabla^2\Phi = 4\pi G\mu$	$\nabla^2\Phi_{\text{elec}} = -\rho_{\text{elec}}/\epsilon_0$

Here,  $\vec{x}_A$  and  $\vec{x}_B$  are the positions of masses  $M$  and  $m$  in the gravitational case and charges  $Q$  and  $q$  in the electrostatic case. The distance between them is  $r = |\vec{x}_A - \vec{x}_B|$  and  $\vec{e}_r = (\vec{x}_B - \vec{x}_A)/r$ .  $\vec{F}_{\text{grav}}$  is the gravitational force exerted by  $M$  on  $m$  and  $\vec{F}_{\text{elec}}$  is the electric force exerted by  $Q$  on  $q$ .  $\Phi_{\text{elec}}$  is the electrostatic potential, and  $\rho_{\text{elec}}$  is electric charge density.

# Masas gravitatoria e inercial ( $m_G = m_I$ )

- Comparar la interacción gravitatoria de una partícula puntual con el resto del mundo con la 2ª ley Newton nos lleva a pensar que la manera de moverse (aceleración) está preinscrita en la estructura del espacio y el tiempo:

$$\vec{F}^G = m \sum_i \frac{G m_i (\vec{r} - \vec{r}_i(t))}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = m \vec{g}(\vec{r}, t) \quad \text{Intensidad de fuerza gravitatoria}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Resistencia a cambiar estado de movimiento independiente del tipo de fuerza aplicada (gravitatoria, electromagnética, elástica, ...)

- En esta asociación  $\vec{a} = \vec{g}$  subyace una equivalencia entre dos tipos de masa: “carga” gravitatoria ( $m^G$ ) e inercial ( $m$ ). Supongamos que no fuera cierta:  $\frac{m^G}{m} = k \neq 1$

$$\vec{F}_{ab}^G = G' \frac{m_a^G m_b^G (\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} = G' k_a k_b \frac{m_a m_b (\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}$$

$G$   
variable

Habría aceleración diferente según el tipo de partícula (a, b, otro)

$$\vec{F}^G = m k \sum_i \frac{G' m_i^G (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = m k \vec{g}'(\vec{r}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = k \vec{g}$$

¡En un mismo campo gravitatorio diferentes objetos acelerarían de manera diferente!

$$\left| \frac{m^G - m}{m} \right| < 10^{-13}$$

**EXPERIMENTALMENTE PROBADO:**  
Galileo, Newton (-3), Eotvos (-9), Dicke (-11), Baesler (-13), ...

# Principio variacional

- Moraleja: si todos los cuerpos en mismas condiciones iniciales caen siguiendo la misma trayectoria en diagrama E-T independientemente de su composición, entonces esa trayectoria (esa curva) es una propiedad de la geometría del E-T y no una fuerza actuando sobre el cuerpo.
- Principio de acción extrema (Mecánica Teórica): una partícula se mueve de  $(r_1, t_1)$  a  $(r_2, t_2)$  de manera que la acción sea un extremo (derivada primera nula). Será la herramienta que nos permita extrapolar a trayectorias en espacio curvado: la partícula siempre elige la trayectoria de acción extrema.
- Ejemplo partícula en potencial unidimensional  $V(x)$ :

lagrangiano  $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$

$m \ddot{x} = \frac{-dV(x)}{dx}$  equivale a  $\frac{-d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$   
ley de Newton                      ecuación de Lagrange

$$S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\dot{x}(t), x(t))$$

S se hace extremo para la trayectoria  $x(t)$  que satisface la ecuación de Lagrange

---

# Relatividad Especial

---

4

# ¿Adición de velocidades?...

- El problema con las teorías anteriores a 1905 surge del hecho de que las ondas electromagnéticas (OEMs), a diferencia de las otras ondas conocidas hasta entonces (acústicas, por ejemplo), no necesitan de un medio material para propagarse, sino que lo pueden hacer en el vacío.
- Un observador S, para el que una OEM se mueve a la velocidad de la luz  $c$ , observa una onda variable en el espacio y en el tiempo. Un observador S', montado en la OEM, observaría una onda variable en el espacio pero constante en el tiempo; sin embargo, las ecuaciones de Maxwell para las OEM no permiten una solución que sea constante en el tiempo.
- Hay dos posibilidades:
  - O las ecuaciones de Maxwell son sólo ciertas en ese sistema de referencia especial S en el que la onda viaja a velocidad  $c$ , el sistema de un supuesto “éter” (fluido que permea todo el espacio y que es tan tenue que no se detecta fácilmente) y, por tanto, no lo son en los demás sistemas de referencia (en los que la velocidad de la luz con respecto al observador sería mayor o menor que  $c$  en función de si uno se mueve en la dirección opuesta al éter o en su misma dirección).
  - *O la velocidad de la luz es la misma independientemente del estado (y dirección) de movimiento del observador ( $c=c'$ ).*

# ...mejor $c=c'$ constante universal

- Einstein se decantó por esta última, pues la primera iba en contra de su conjetura de que no debe existir un sistema de referencia privilegiado. Esta conjetura fue posteriormente elevada al nivel de **postulado** formulado así: *las leyes de la Física, expresadas adecuadamente, deben ser independientes del sistema de referencia inercial en el que se formulen*. Dicho de una tercera forma: *ningún experimento puede decirnos de dos observadores inerciales cuál está moviéndose y cuál está en reposo*.
- Además, la primera alternativa fue chocando con sucesivos experimentos que refutaron la teoría del éter. El de Michelson y Morley probó que la Tierra no se mueve con respecto a ningún éter. De existir éste, debía ser arrastrado por la Tierra, lo que fue refutado por el experimento de Bradley sobre la aberración de la luz.

Si existiera el éter:

$$v_{S,\text{éter}} \equiv -v_{\text{éter}}$$

$$v_{T,S} = -v_T$$

$$v_{T,S} = v_T$$

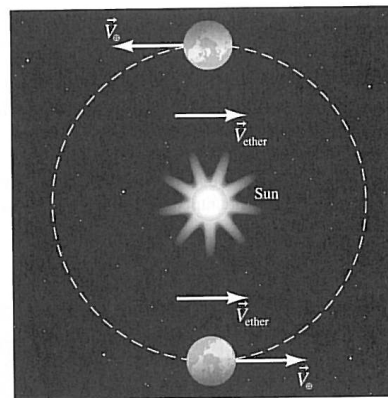


FIGURE 4.1 The Michelson–Morley experiment. Suppose the uniform ether is moving with a velocity  $\vec{v}_{\text{ether}}$  with respect to the Sun or, equivalently, that the Sun is moving with a velocity  $-\vec{v}_{\text{ether}}$  with respect to the ether. Let  $\vec{V}_{\oplus}$  be the velocity of the Earth with respect to the Sun at one point in its orbit. At that point, the velocity of the Earth with respect to the ether is  $\vec{V}_{\oplus} - \vec{v}_{\text{ether}}$ . Six months later the velocity of the Earth is approximately (neglecting the ellipticity of the Earth's orbit)  $-\vec{V}_{\oplus}$ , and its velocity with respect to the ether is  $-\vec{V}_{\oplus} - \vec{v}_{\text{ether}}$ . That is a difference in velocity of  $2\vec{V}_{\oplus}$  no matter what  $\vec{v}_{\text{ether}}$  is.

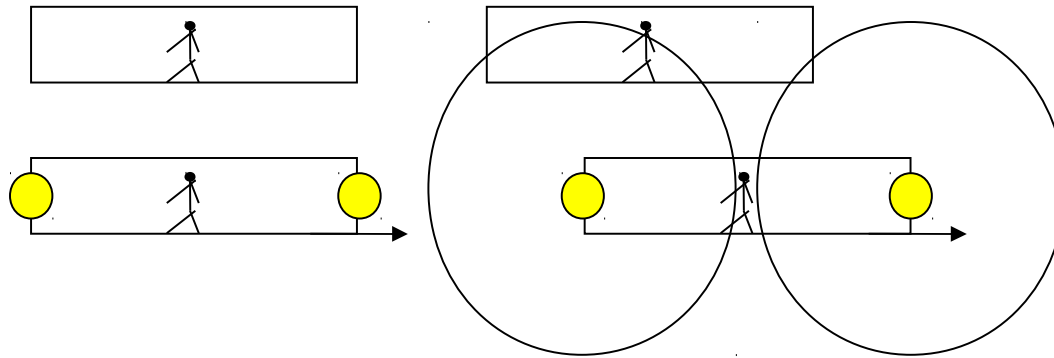
Debería obtenerse:

$$\Delta v = (-v_{\text{éter}} + v_T) - (-v_{\text{éter}} - v_T) = 2v_T$$

Pero experimentalmente se obtiene:  $\Delta v = 0$

# Relatividad de la simultaneidad

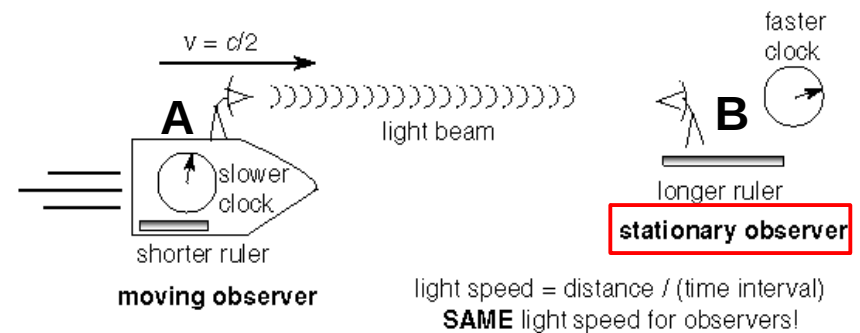
- La simultaneidad de sucesos es relativa. Los destellos simultáneos para uno no lo son para el otro.



- Las leyes físicas no dependen del estado de movimiento (inercial) del observador. Ni siquiera  $c$ : A (emisor de la luz) mide velocidad  $c$ ; pero B también mide  $c$  (no  $c+c/2$ ).

- La única forma de que los dos midan la misma  $c$  es que sus patrones de espacio y de tiempo sean diferentes. No sólo estarán en desacuerdo en la distancia recorrida por el rayo (Newton) sino también en el tiempo que tardó en llegar de A a B.

- Ojo con lenguaje: ¿Tiempo más lento = segundos más largos? ¿Con un metro más largo el mismo objeto mide menos? Puede ser confuso.



# Consecuencias de la RE

- Es un efecto mutuo: El observador en la nave A mide la longitud de un objeto en la nave B. Si B se le acerca o se aleja deprisa, le parece más corto que si B está quieto. Y el paso del tiempo en B le parece más lento (cada segundo de B es tan largo como varios de los suyos). Al observador en B todo le parece normal en su nave pero le parece que las distancias en A son más cortas y los tiempos más largos.
  
  - Dilatación de tiempos (ej: rayos cósmicos viven millonésimas de segundo en su SR).
  - Contracción de longitudes
  - Aumento de masa
  - $E=mc^2$
  - Unificación en Espacio-Tiempo: sucesos en 4D.
    - “Murcia está a hora y cuarto de Albacete” (distancias en unidades de tiempo)
    - “AlfaCen está a 4 años-luz de la Tierra”
    - “El concierto empieza a las 23h en la Plaza Mayor”
-



# Elemento de línea (ds)

- Geometría del espacio 4D plano: elemento de línea en dos SRIs (S, S').
- Experimento espejos paralelos: distancia entre sucesos de salida y llegada

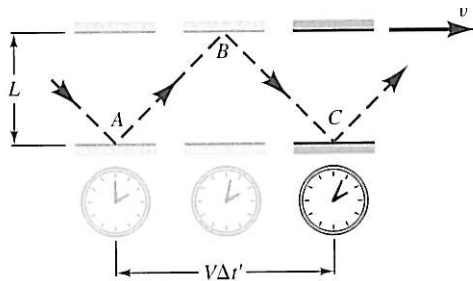
□ S:  $\Delta t = \frac{2L}{c}$   
 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$

S':  $\Delta x' = v\Delta t'$   
 $\Delta y' = \Delta z' = 0$   
 $\Delta t' = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2}}{c}$

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -4 \left[ L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2 \right] + (\Delta x')^2 = -4L^2 = -(c\Delta t)^2$$

$$(\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

$$x + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$



**FIGURE 4.7** The thought experiment described in Figure 4.6 is shown here in an inertial frame spanned by coordinates  $(t', x', y', z')$ , in which the mirrors are moving with speed  $V$  in the  $x'$ -direction along their lengths. The path the light pulse travels in a time  $\Delta t'$  between departure and return to the lower mirror is shown. The events of departure and return are separated in space by  $\Delta x' = V\Delta t'$ ,  $\Delta y' = \Delta z' = 0$ . The length of the path traveled is  $2[L^2 + (\Delta x'/2)^2]^{1/2}$ , and  $\Delta t'$  is this length divided by  $c$ .

- Encontramos un invariante (cantidad que se escribe igual en los dos sistemas) que postulamos como definición de métrica (no euclídea sino de Minkowski).

$$(\Delta s)^2 \equiv -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$$ds^2 \equiv -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

# Diagramas Espacio-Tiempo

- Usamos  $ct$  en vez de  $t$  para que tengan la misma dimensión.
- Cada punto es un suceso. Línea de mundo (l.d.m.) = trayectoria.

■ Pendiente: 
$$\frac{d(ct)}{dx} = c \frac{dt}{dx} = \frac{c}{V_x} = \begin{matrix} \infty & V_x = 0 \\ > 1 & 0 < V_x < c \\ 1 & V_x = c \end{matrix}$$

- Conos de luz (definen causalidad):

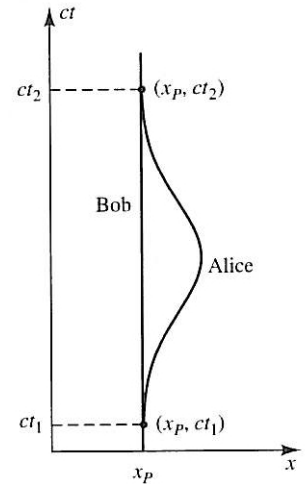
- Signo – hace que  $ds^2$  no siempre sea positivo o nulo
- Existen tres zonas:

$ds^2 < 0$  Intervalo temporal; l.d.m. de partículas

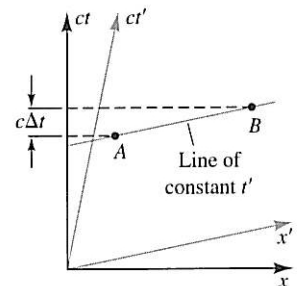
$ds^2 = 0$  Separación nula (conectables por luz); l.d.m. fotones

$ds^2 > 0$  Intervalo espacial; l.d.m. taquiones

- Un suceso puede ser posterior a otro (del que está separado por intervalo espacial puro) en un SRI y anterior en otro SRI. Pero se puede afirmar sin ambigüedad que un suceso es anterior a otro del que está separado por intervalo temporal puro.



**FIGURE 4.12** The twin paradox from a spacetime point of view. Alice and Bob follow two different world lines between the same two spacetime points. The lengths



**FIGURE 4.14** Events  $A$  and  $B$  are simultaneous in the  $(ct', x')$  frame because they occur at the same value of  $t'$ . They are not simultaneous in the  $(ct, x)$  frame, where  $A$  occurs before  $B$ .

# Tiempo propio

- Se utiliza para medir *distancias* en la l.d.m. de una partícula con masa (intervalos temporales).

$$d\tau^2 \equiv \frac{-ds^2}{c^2}$$

- Es el tiempo medido por un reloj que se mueve en la l.d.m. Un reloj es, pues, un aparato que mide *distancias* en intervalos temporales.
- Dilatación del tiempo:

$$\tau_{AB} = \int d\tau = \int \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} = \int dt' \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t')}{c^2}}$$

$$\tau_A^B < t_B - t_A \quad \text{porque} \quad \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t')}{c^2}} < 1$$

- Para intervalos  $dt$  tan cortos que  $v$  es constante en ellos:  $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$
- Línea recta en RE es la distancia más larga entre dos sucesos separados por intervalo temporal puro. La trayectoria de Alice parece más larga en el dibujo pero es más corta en E-T (4D) porque la raíz cuadrada es menor que uno. La trayectoria temporal pura es la más larga entre dos sucesos.

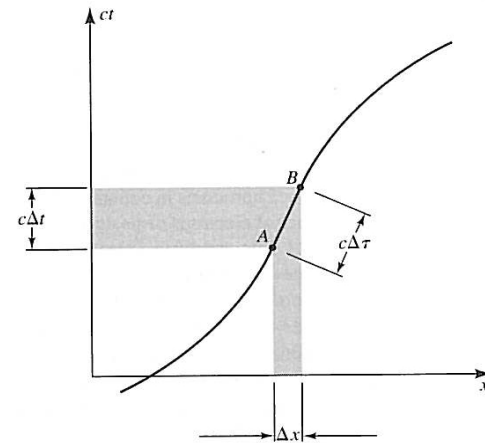


FIGURE 4.11 Proper time and coordinate time. The curve in this figure is the world line of a particle moving in the  $x$ -direction. A clock carried with the particle measures the proper time along the world line, which is the spacetime distance along the world line in time units. The proper time,  $\Delta\tau$ , between two points in spacetime  $A$  and  $B$  separated by small coordinate intervals  $\Delta t$  and  $\Delta x$  is given by the line element of flat spacetime, (4.8) and (4.12). The interval  $\Delta t$  is longer than  $\Delta\tau$ ; that is time dilation. Judged by the Euclidean geometry of the plane,  $\Delta t$  appears shorter than  $\Delta\tau$ . But the geometry of a  $(ct, x)$  slice of flat spacetime is not Euclidean.

# Transformaciones de Lorentz

- Generalizan las galileanas en RE. Son las que dejan invariante el nuevo ds.
- Por culpa del signo menos, una rotación de ángulo fijo que mezcle x con t (transformación novedosa) se escribe  $(-\infty < \phi < \infty)$  :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

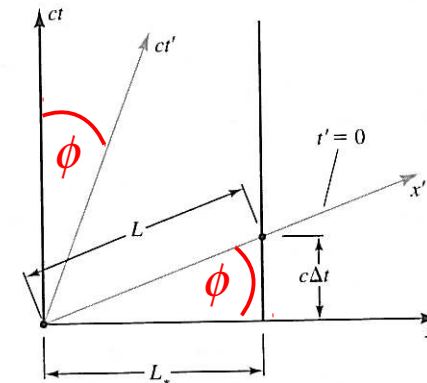
$$\rightarrow V = c \tanh \phi$$

partícula en reposo en  $x'=0$ : su l.d.m. en  $S'$  es eje  $ct'$ ; en  $S$  se mueve con velocidad constante  $v$

- Un movimiento uniforme  $V$  da:  
**QQ Lorentz boost (eliminando phi)**

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$



**FIGURE 4.16** Lorentz contraction of length. The figure shows the world lines of the ends of a rod oriented along the  $x$ -axis in its own rest frame spanned by coordinates  $(ct, x)$ . The distance  $L_*$  between the world lines is the rest length of the rod. Also shown on the same plot are the axes  $(ct', x')$  of an inertial frame moving with speed  $V$  with respect to the rest frame. In this frame the rod is moving with velocity  $-V$  along the  $x'$ -axis. The length of the rod  $L$  in this frame is the distance between its ends at a single moment of time,  $t'$ . The events at the ends at time  $t' = 0$  are indicated by  $\bullet$ 's in the figure. Although the length  $L$  looks longer than  $L_*$  in the figure, it is actually shorter because of the non-Euclidean geometry of spacetime.

**QQ contracción**  $L = L_* \sqrt{1 - V^2/c^2} = L_* / \gamma$