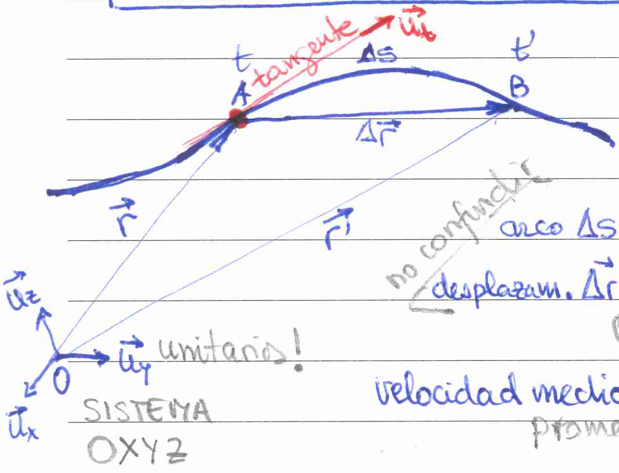
DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MOVIMIENTO



$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ posición en t

$\vec{r}' = \overrightarrow{OB} = x'\,\vec{u}_x + y'\,\vec{u}_y + z'\,\vec{u}_z$ posición en $t' = t + \Delta t$

no confundir: arco Δs

desplazam. $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \overbrace{(x'-x)}^{\Delta x}\vec{u}_x + \overbrace{(y'-y)}^{\Delta y}\vec{u}_y + \overbrace{(z'-z)}^{\Delta z}\vec{u}_z$

velocidad media (promedio) $\langle\vec{v}\rangle \equiv \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x + \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y + \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\vec{u}_z$

vector ∥ desplazamiento $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$

$B \to B' \to B'' \ldots \to A$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA: límite cuando B se acerca a A

$\Delta t \to 0$

invariables

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \langle\vec{v}\rangle = \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right\}\cdot\vec{u}_x + \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}\cdot\vec{u}_y + \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}\cdot\vec{u}_z$$

Durante el proceso B → A, el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ cambia continuamente de dirección y magnitud y, por tanto, el vector $\langle\vec{v}\rangle$ también. En el límite tendremos que $\Delta\vec{r}$ es tangente (a la trayectoria, en A) y la velocidad instantánea también (hemos dicho que velocidad y desplazamiento son paralelos).

Las componentes de tipo $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ se escribirán como $\frac{dx}{dt}$ (def. de derivada)

$$\Rightarrow \vec{v} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\vec{u}_x + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\vec{u}_y + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\vec{u}_z \quad \text{, es decir, } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

misma dirección que cambio instantáneo en posición (tangente)

vector de componentes cartesianas $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

y magnitud (módulo) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ "celeridad" (escalar)

ALTERNATIVA: definir el desplazamiento a lo largo de la trayectoria (del arco Δs).

límite del producto

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) =$$

porque si $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta s = 0$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta r\,\vec{u}_t}{\Delta s}\right)}_{\text{porque } \Delta r = \Delta s}\cdot\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \vec{u}_t\cdot\frac{ds}{dt}$$

invariable

módulo v

dirección tangente a trayectoria (en general, combinación lineal de $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$)

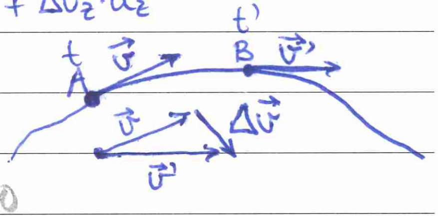
SANTILLANA

La velocidad puede cambiar porque cambie
- su módulo
- su dirección

Si la trayectoria es curvilínea, la dirección de la velocidad cambia debido a que la velocidad es tangente a la trayectoria y ésta cambia continuamente.

aceleración media $\langle \vec{a} \rangle \equiv \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\cdot \vec{u}_x + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\cdot \vec{u}_y + \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t}\cdot \vec{u}_z$.

$$\vec{v} = v_x \underbrace{\vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z}_{\text{invariables}} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \Delta v_x \cdot \vec{u}_x + \Delta v_y \cdot \vec{u}_y + \Delta v_z \cdot \vec{u}_z$$



ACELERACIÓN INSTANTÁNEA: límite $\Delta t \to 0$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\cdot \vec{u}_x\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\cdot \vec{u}_y\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\cdot \vec{u}_z\right) =$$

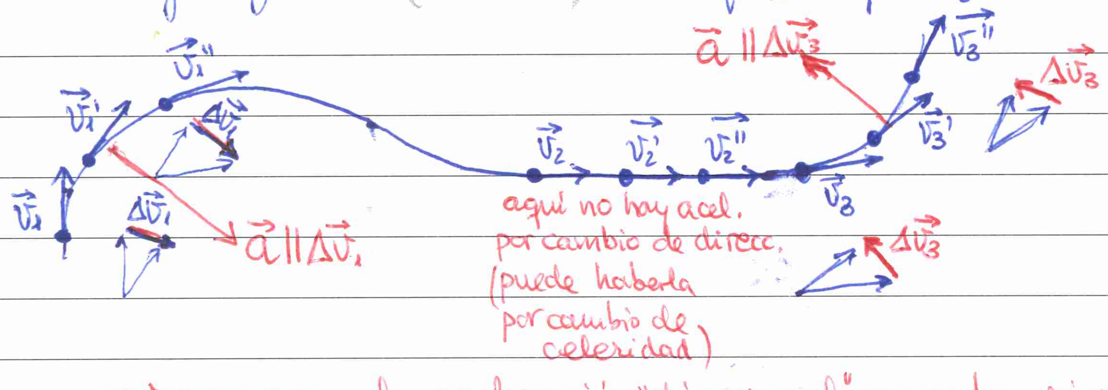
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)\cdot \vec{u}_x + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)\cdot \vec{u}_y + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)\cdot \vec{u}_z =$$

Concepto derivada $= \underbrace{\dfrac{dv_x}{dt}}_{a_x} \cdot \vec{u}_x + \underbrace{\dfrac{dv_y}{dt}}_{a_y} \cdot \vec{u}_y + \underbrace{\dfrac{dv_z}{dt}}_{a_z} \cdot \vec{u}_z$, es decir,

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ misma dirección que cambio instantáneo en velocidad (¿cuál será?)

vector de componentes cartesianas $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

y magnitud (módulo) $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



⇒ vemos que la aceleración "direccional" apunta siempre hacia el lado cóncavo (zona del centro de curvatura)

pero en general no tiene por qué ser ni tangente ni perpendicular a la trayectoria

ECUACIONES DE MOVIMIENTO:

invariables

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt^2}(x\vec{u}_x) + \frac{d}{dt^2}(y\cdot\vec{u}_y) + \frac{d}{dt^2}(z\cdot\vec{u}_z) =$$

$$= \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{a_x}\cdot\vec{u}_x + \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a_y}\vec{u}_y + \underbrace{\frac{d^2z}{dt^2}}_{a_z}\vec{u}_z$$

Si conocemos la evolución de la posición en el tiempo:

funciones $\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{derivar}} \left.\begin{array}{l} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{derivar}} \begin{array}{l} a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\ a_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{array}$

... podemos deducir la evolución de velocidad y aceleración.

Otras veces iremos en sentido contrario (integrando): $\vec{a}(t) \to \vec{v}(t) \to \vec{r}(t)$

A menudo este proceso se hará de forma NUMÉRICA (informática).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\cdot dt' \Rightarrow \vec{v}(t) = \underset{\vec{v}(t_0)}{\vec{v}_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,dt'$$

realmente

instante inicial: $t_0, \vec{v}_0, \vec{r}_0$

$\vec{r}(t_0)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\cdot dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0\cdot dt' + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t'')\,dt''\right)dt' =$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t'')\,dt''\right)dt'$$

⚠ si $\vec{a}(t)$ NO es constante, no la podemos sacar de las integrales (caso general)

CASO ESPECIALMENTE IMPORTANTE

$\vec{a}$ = constante (en módulo y dirección)

...pero no olvides que ya estamos perdiendo cierta generalidad

- $\vec{v} = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dt \xRightarrow{\vec{a}=cte} \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,(t-t_0)$

velocidad y posición en cualquier instante

substituimos en $\vec{r} = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} [\vec{v_0} + \vec{a}(t-t_0)]\,dt = \vec{r_0} + \underbrace{\vec{v_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t-t_0)^2}$ (Y)

$\rightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{v_0}\, dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t} (t-t_0)dt = \vec{v_0}(t-t_0) + \vec{a}\,\frac{(t-t_0)^2}{2}$

Un poco de GEOMETRÍA:

ecuación vectorial del plano

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(u_1,u_2,u_3) + \mu(v_1,v_2,v_3)$

Recordemos que, en general, $\vec{v_0}$ y $\vec{a}$ tienen direcciones diferentes $\vec{v} \nparallel \vec{a}$

El extremo de $\vec{r}$ (trayectoria vista desde O) se encuentra en el plano definido por los vectores directores $\vec{v_0}, \vec{a}$ que pasa por $\vec{r_0}$.

si $t=t_0$ en la ecuación, tenemos $\vec{r}=\vec{r_0}$

$\Rightarrow$ si $\vec{a}$ = cte, el movimiento se realiza en un PLANO

(Ejercicio: demostrar que $\vec{r} = \vec{a}\,s^2 + \vec{b}\,s + \vec{c}$ representa una parábola en el plano $\vec{a},\vec{b}$ que pasa por punto $\vec{c}$)

Ejercicio MRU: particularizar ecuaciones para el caso de movimiento rectilíneo en el eje X y uniforme ($\vec{v}$ = cte).

Solución: $x = x_0 + v(t-t_0)$ con $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Ejercicio MRUA: particularizar para caso rectilíneo uniformemente acelerado.

Solución: $x = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

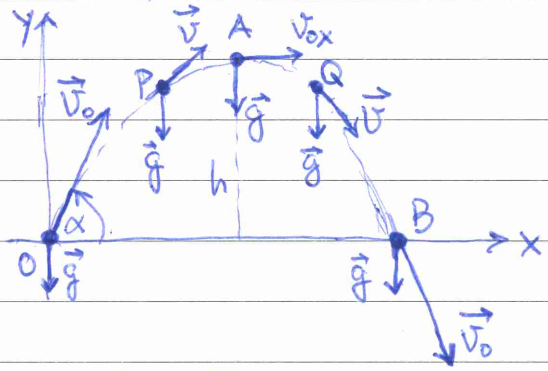
APLICACIÓN DEL CASO $\vec{a} = cte$
TIRO PARABÓLICO (PROYECTILES)

movimiento bajo aceleración constante

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,(t - t_0)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

En este caso $\vec{a} = \vec{g}$ (aceleración de gravedad)



Eligiendo como plano de movto XY, definido por $\vec{v}_0, \vec{g}$ (ecs. param. plano):

$\Rightarrow \vec{g} = -g\,\vec{u}_y$

Elegimos $\begin{cases} O \text{ coincidente con } \vec{r}_0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$

$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{u}_x + v_{0y}\,\vec{u}_y$ con $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow \vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y = v_{0x} \cdot \vec{u}_x + v_{0y} \cdot \vec{u}_y - gt\,\vec{u}_y$

separando en ejes: $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ } permanece cte (no depende de t)

$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha - gt$

$\Rightarrow \vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y = (v_{0x} \cdot \vec{u}_x + v_{0y} \cdot \vec{u}_y)\,t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{u}_y$

separando en ejes: $x(t) = v_{0x} \cdot t$, $y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ } coordenadas de la partícula en función del tiempo

ALTURA MÁXIMA $v_y = 0 \Rightarrow t_A = \dfrac{v_{0y}}{g} = \dfrac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g} \Rightarrow h = y(t_A) = \dfrac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$

TIEMPO DE VUELO (t_B) para que retorne al "suelo" $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow t_B = \dfrac{2\,v_{0y}}{g} = 2t_A$ ¡lógico!

ALCANCE ($\overline{OB}$) $x(t_B) = \dfrac{2 v_0^2 \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$

¿para qué ángulo es máximo?

ECUACIÓN TRAYECTORIA $y = f(x)$, eliminar t en el sistema de ecs.: por substitución

$$y = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot x}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x}$$

¡ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA!

Hemos despreciado:

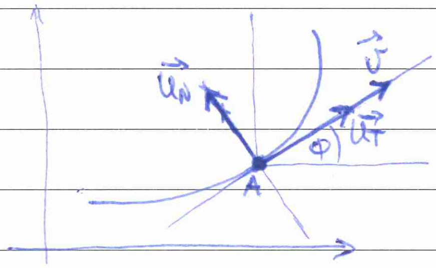
1) curvatura tierra: $x(t_B) \ll R_T$
2) variación $\vec{g}(h)$: $h \ll R_T$
3) resistencia aire: v_0 pequeña

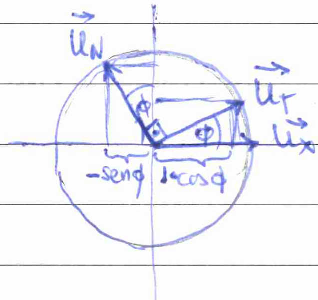
VOLVEMOS AL CASO MÁS GENERAL

estudio curva plana pero válido para cquier curva

ACELERACIONES TANGENCIAL Y NORMAL

cada una con su significado físico





$\vec{u}_T = \cos\phi\,\vec{u}_x + \text{sen}\,\phi\,\vec{u}_y$

$\vec{u}_N = -\text{sen}\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y$ cóncavo h. arriba

$(\vec{u}_N = \text{sen}\phi\,\vec{u}_x - \cos\phi\,\vec{u}_y$ cóncavo h. abajo$)$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(v\,\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

derivada de producto

- constante si movto. rectilíneo
- si no, estudiémoslo (*)

invariables

$$* \quad \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d(\cos\phi)}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{d(\text{sen}\,\phi)}{dt}\,\vec{u}_y = \frac{d(\cos\phi)}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{d(\text{sen}\phi)}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_y =$$

$$= -\text{sen}\phi\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_y = \boxed{\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_N} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_T}{dt} \parallel \vec{u}_N}$$

☺ precioso, importante

$\Rightarrow$ El cambio en la dirección de la velocidad produce una ACELERACIÓN NORMAL a la trayectoria

El cambio en la celeridad produce una ACELERACIÓN TANGENCIAL.

ALTERNATIVA: si medimos desplazamiento a lo largo del arco ds

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\,v = \frac{v}{\rho}$$

arco = radio curv · ángulo (radianes) $\quad ds = \rho\, d\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$

Por tanto, $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_N = \frac{v}{\rho}\,\vec{u}_N$ ¡resultado general!

Volvamos a la ec. inicial: $\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_N}$

$a_T \qquad a_N$

vector de componentes en base $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$

y módulo $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

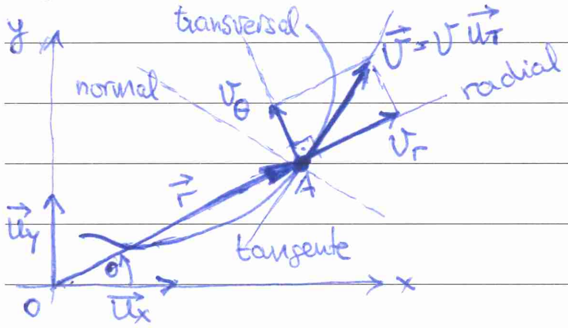
Particulariza:
- si $v = cte \Rightarrow a_T = 0$
- si rectilíneo $(\rho = \infty) \Rightarrow a_N = 0$ (no cambia dirección)

SANTILLANA

SANTILLANA

VOLVEMOS AL CASO MÁS GENERAL

VELOCIDADES RADIAL Y TRANSVERSAL



no confundir sistemas de ejes:

- cartesiano (base ortonormal $\vec{u_x}, \vec{u_y}$)
- tangente y normal a la trayectoria (base ortonormal $\vec{u_T}, \vec{u_N}$)
- radial y transversal: base ortonormal $\vec{u_r}, \vec{u_\theta}$

En esta última base: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{u_r}\cdot r) = \dfrac{dr}{dt}\cdot\vec{u_r} + r\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} \Rightarrow$

Ejercicio: estudiar $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt}$

(similar a desarrollo de $\dfrac{d\vec{u_T}}{dt}$ en epígrafe "aceleraciones tangencial y normal")

Solución: $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = -\operatorname{sen}\theta\,\dfrac{d\theta}{dt}\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt}\,\vec{u_y} = \dfrac{d\theta}{dt}\,\vec{u_\theta} \Rightarrow \dfrac{d\vec{u_r}}{dt} \parallel \vec{u_\theta}$ 😊

$\Rightarrow$ Volvemos a $\vec{v} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$

componentes radial y transversal: v_r ; $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

"rotación" de la partícula alrededor de O

= En el movimiento circular la velocidad será enteramente TRANSVERSAL (caso particular)

CASOS PARTICULARES

MOVIMIENTO RECTILÍNEO ($a_N = 0$)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} (t - t_0)^2$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} (t - t_0)$$
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N$$

0

< Valen estas expresiones

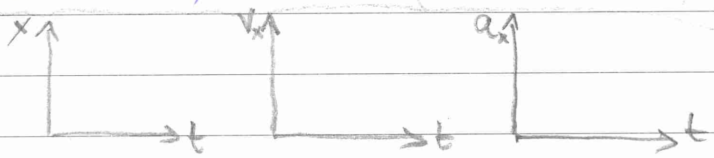
MRU (rectilíneo uniforme) $v = cte \Rightarrow a_T = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0)$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0$$
$$\vec{a} = 0$$

$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ eligiendo x como eje de movimiento

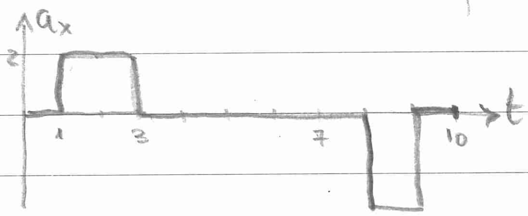
MRUA (uniformemente acelerado) $a = cte$ (caso estudiado)

Ejercicio: gráficas

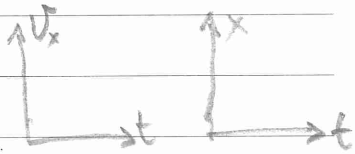


Ejercicio: aceleración constante por tramos

Dada

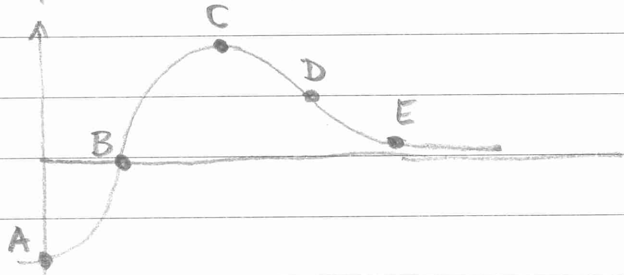


hallar



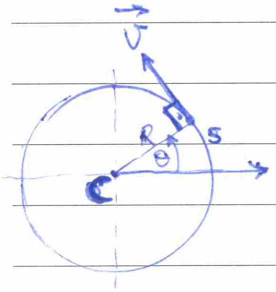
Movimiento rectilíneo general (con aceleración variable)

Ejercicio: interpretación del movimiento a partir de gráfica x-t



Juego: diviértete con algunos de nuestros políticos, presentadores, ...
"desaceleración de la economía"
"curva de la pandemia"
"tercera derivada y sucesivas" (skewness)

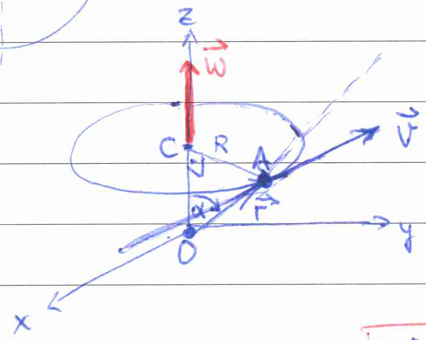
MOVIMIENTO CIRCULAR $\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{R}$ vector de posición es radial



Sabemos que $\vec{v} = v\,\vec{u}_T = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_T = R\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_T = \underbrace{R\cdot\omega}_{\text{celeridad } v}\cdot\vec{u}_T$

con $ds = R\,d\phi$ (arc, ang) ; R: cte ; $\frac{d\phi}{dt} \equiv \omega\ \left[\frac{rad}{s} = s^{-1}\right]$

defino VELOCIDAD ANGULAR
no tiene porqué ser constante



geometría: $R = r\,\text{sen}\,\alpha$

El producto $R\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_T = r\,\text{sen}\,\alpha\,\frac{d\phi}{dt}\,\vec{u}_T$

tiene módulo $r\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot\text{sen}\,\alpha = r\,\omega\,\text{sen}\,\alpha$

que recuerda al de un producto vectorial

$\Rightarrow$ Se cumple que $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$ ¿podría ser $\vec{v} = \vec{r}\times\vec{\omega}$?

La velocidad angular se puede expresar como un vector que debe ser PERPENDICULAR AL PLANO DE MOVIMIENTO $(\vec{u}_\perp)$ y en el sentido de la fórmula enmarcada $(\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r})$ no en el contrario

Definimos también $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ACELERACIÓN ANGULAR

Al ser un movimiento en un plano, la dirección de $\vec{\omega}$ no varía:

$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}) = \frac{d\omega}{dt}\cdot\vec{u}_\perp$ (módulo α) $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$; $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t}\alpha(t)\,dt$

MCUA (uniformemente acelerado) $\alpha = cte$ sale de la integral

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha(t-t_0) \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$$

Aceleración tangencial $a_T = \frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\,\alpha = R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$

" normal $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ que siempre será centrípeta
hacia el mismo centro curvat.

seguimos particularizando ...

$\equiv$ MOVIMIENTO C.U. (circular uniforme) $\alpha = cte = 0$ porque $\vec{\omega} = cte$

movimiento periódico

$P \equiv \frac{t}{n}$; $\nu = \frac{n}{t}$; i.e. $\nu = \frac{1}{P}$

tiempo empleado por revolución — frecuencia

Como $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \underset{cte}{\omega} \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$

En una revolución completa: $t = P$, $\theta = 2\pi$ $\Rightarrow \left(\begin{matrix} si\ t_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow \theta = \omega t$, $2\pi = \omega \cdot P$ (1 rev)

$\Downarrow$

$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$

Aceleración: aunque $\alpha = 0$, $a_T = 0$ pero $a_N \neq 0$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \overset{\vec{\omega}=cte}{=} \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \Rightarrow$ |CENTRÍPETA|

(regla prod. vectorial)

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

módulo $|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega \cdot v \cdot \operatorname{sen} 90° =$

$= \omega \cdot v = \omega^2 R$ como hemos visto

☺ a_N, centrípeta en MCUA