# MOVIMIENTO RELATIVO

## NOMENCLATURA DE LOS VECTORES DE REFERENCIA

Objetos o partículas A, B
Observador OXYZ

$\vec{r}_A = \vec{r}_{AO}$ posición de A con respecto a O (c.r.a.)
vector $\vec{OA}$, flecha $O \longrightarrow A$

- Posición relativa: $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ posición de B c.r.a. A
vector $\vec{AB}$, flecha $A \longrightarrow B$

compruébalo con suma de vecs. concatenados:

$$\vec{r}_A + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_B$$
$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

- Velocidad relativa: derivo: $\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

- Aceleración relativa: derivo: $\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$

$\Rightarrow$ Para obtener la posición/velocidad/aceleración relativa de dos cuerpos se restan sus posiciones/velocidades/aceleraciones c.r.a. observador.

## MOVIMIENTO RELATIVO BAJO TRASLACIÓN UNIFORME de los observadores

Observadores $\left\{ \begin{array}{l} OXYZ \\ O'X'Y'Z' \end{array} \right.$ que se mueven el uno c.r.a. otro con velocidad uniforme que elegimos en eje $X = X'$ : $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_x$ = cte

Partícula en A con velocidad $\vec{v}$ para O, $\vec{v}'$ para O'.

$\vec{u}_x = \vec{u}_{x'}$
$\vec{u}_y = \vec{u}_{y'}$
$\vec{u}_z = \vec{u}_{z'}$
Condiciones

$\overrightarrow{OO'} = \vec{V} t$ ; $\quad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$

$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' \Rightarrow \boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t}$ TRANSF. GALILEO

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

¡Suponemos tiempo indepte. de observ.! (no relativista)

O y O' pueden saber las coordenadas de posición que el otro asignará a la partícula A

Continuemos con las velocidades que asignará cada uno a A:

Observador O) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$ — invariables — expresados en la misma base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$

Observador O') $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_z$ ; $dt' = dt$ ; $\vec{u}_x = \vec{u}_{x'}$

Derivando $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$ tenemos: $\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}}$

Derivando de nuevo: $\frac{d}{dt}(\vec{v}') = \frac{d}{dt}(\vec{v}) - \frac{d}{dt}(\vec{V})$ cte $\Rightarrow \boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$ ; 0

La aceleración es invariante bajo traslaciones uniformes ($\vec{V}$ = cte)

sistemas de referencia sin acel. mutua (inerciales: SRI)

¡independiente del movimiento (trasl. unif.) del observador!

Iréis viendo la IMPORTANCIA de los INVARIANTES bajo transforms.

## MOVIMIENTO RELATIVO BAJO ROTACIÓN UNIFORME de los observadores

Suponemos origen común $O = O' \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}'$

Pensaremos como el observador O pero todo es reversible (simetría)

Para O, el observador O' rota con $\vec{\omega} = cte$ alrededor de un eje genérico

no elijo ninguno en particular

Partimos de $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\cdot\vec{u}_y + z\vec{u}_z$, $\vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\cdot\vec{u}_{z'}$

pero ahora $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ no coincide con $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$

Observador O estudia la velocidad de una partícula A:

$$\boxed{\vec{v} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_O} = \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_O = \frac{d}{dt}\left(x'\cdot\vec{u}_{x'} + y'\cdot\vec{u}_{y'} + z'\cdot\vec{u}_{z'}\right) =$$

$\vec{r} = \vec{r}'$, $t = t'$

no invars. para O

$$= \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\cdot\vec{u}_{z'}}_{\vec{v}'} + x'\cdot\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\cdot\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z'\cdot\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} =$$

Estudio aparte términos del tipo $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}$.

$\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'}$ están en MCU con $\vec{\omega} = cte$ alrededor de O

Recordad $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \otimes \vec{r}$. En nuestro caso: $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \otimes \vec{u}_{x'}$

prod. vectorial

(no es más que un vector pos. unitario)

Por tanto, el segundo trío de sumandos será:

$$x'(\vec{\omega} \otimes \vec{u}_{x'}) + y'(\vec{\omega} \otimes \vec{u}_{y'}) + z'(\vec{\omega} \otimes \vec{u}_{z'}) =$$

$$\stackrel{(Y)}{=} \vec{\omega} \otimes (x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}) = \vec{\omega} \otimes \vec{r}$$

propiedades prod. vectorial | factor común

aparece este término extra en la velocidad a causa de la rotación mutua

El primer trío de sumandos es $\vec{v}'$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \otimes \vec{r}}$$

SANTILLANA

Observador O estudia ahora la aceleración de la partícula A.

Vuelve a derivar con respecto al tiempo de forma análoga:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v})\Big]_O = \boxed{\frac{d}{dt}(\vec{v}')\Big]_O} + \boxed{\frac{d}{dt}(\underset{cte}{\vec{\omega}} \times \vec{r})}$$

no invars. para O

En la derivada $\frac{d\vec{v}'}{dt}\Big]_O = \frac{d}{dt}\left(v'_{x'} \cdot \vec{u}_{x'} + v'_{y'} \cdot \vec{u}_{y'} + v'_{z'} \cdot \vec{u}_{z'}\right)$ primas opcionales

le vuelven a aparecer dos tríos de sumandos, como antes:

$$\underbrace{\frac{dv'_{x'}}{dt} \cdot \vec{u}_{x'} + \frac{dv'_{y'}}{dt} \cdot \vec{u}_{y'} + \frac{dv'_{z'}}{dt} \cdot \vec{u}_{z'}}_{\boxed{\vec{a}'}} + v'_{x'} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt}}_{\vec{\omega} \otimes \vec{u}_{x'}} + v'_{y'} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt}}_{\vec{\omega} \otimes \vec{u}_{y'}} + v'_{z'} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}}_{\vec{\omega} \otimes \vec{u}_{z'}} =$$

$$\underset{\text{factor común}}{\vec{\omega}} \otimes (v'_x \cdot \vec{u}_{x'} + v'_y \cdot \vec{u}_{y'} + v'_z \cdot \vec{u}_{z'}) = \boxed{\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$

Evaluando $\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \overset{\vec{\omega} = cte}{=} \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) =$ distributiva

obtenemos $\boxed{\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$

Recapitulando: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{ACELERACIÓN CORIOLIS}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{ACELERACIÓN CENTRÍPETA que ya encontramos en MCU}}}$

Ejemplo: rotación de la Tierra, sentido de giro de vientos/fluidos