Límite de Chandrasekhar

Martin Hendrick

24 de mayo 2010

Introduccíon

- Física estadistica = estudio de sistemas compuestos de muchas particulas
- Muchas particulas ⇒ imposiblilidad de determinar el estado microscopico del sistema
- Física estadistica describe el sistema gracias a sus propiedades macroscopicas (presión, temperatura, densidad,...)
- Un estdo macroscopico coresponde a un gran conjunto de estado microscopico posible ⇒

Postulado de la física estadistica

Dado un sistema aislado en equilibrio, el sistema tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los microestados accesibles

Introduccíon

- Estudiar las propiedades macroscopicas = deteminar cuanto diferentes estados microscopicos hay (para un conjunto de caracteristicas dadas, pe la energia)
- En resumen hay que contar.
- Particulas identicas cuanticas (non interactuantes) imponen una maniera bien definida de contar
- Las particulas cuanticas son de dos tipos :
  - bosones
  - fermiones (función de onda antisimetrica $\Rightarrow$ principio de exclusión de Pauli)
- Un sistema de N particulas identicas es determinado por el conjunto de numero de ocupación $(n_1, n_2, ..., n_j, ...)$

Introduccíon

- Sea $\nu = (n_1, n_2, ..., n_j, ...)$ el estado ν
- Entonces $N_\nu = \sum_j n_j =$ numero total de particulas en el estado ν
- De la misma manera, si ϵ_j es la energia de una particula en el estado j, $E_\nu = \sum_j \epsilon_j n_j$
- Para un sistema de fermiones, debido al principio de exclusión de Pauli, $n_j = 0$ o 1. La estadistica generada por esta manera de contar, aqui es la que nos interesa, se llama la estadistica de Fermi-Dirac
- Dando el postulado de la fisica estdistica, queremos calcular $\langle N \rangle = \sum_j \langle n_j \rangle$ y $\langle E \rangle = \sum_j \langle n_j \rangle \epsilon_j$

Introducción

- Con un poco de trabajo podemos caluclar $\langle n_j \rangle$
  - Para los fermiones

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1} \equiv F(\epsilon_j)$$

$\beta = 1/k_b T$, μ el potencial quimico, $F(\epsilon_j)$ función de Fermi

- Ejemplo : gas de electrones non relativista en un potential infinito
  - Schrödinger $\Rightarrow \epsilon_j = (\hbar k^2/2m)$, con $\vec{k} = (\widehat{x} n_x + \widehat{y} n_y + \widehat{z} n_z)\pi/L$, $L^3 = V$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \sum_j \langle n_j \rangle = 2 \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z F[\epsilon(k)]$$

Introducción

- Seguimos

$$\langle N\rangle = \sum_j \langle n_j\rangle = 2\int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z F[\epsilon(k)]$$

$$= 2\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty [dk_x dk_y dk_z/(\pi/L)^3] F[\epsilon(k)]$$

$$= \left[\frac{2V}{(2\pi)^3}\right] \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dk_x dk_y dk_z F[\epsilon(k)]$$

$$= \left[\frac{2V}{(2\pi)^3}\right] \int d\vec{k} F[\epsilon(k)]$$

Introducción

- A $T = 0$
  - para $\epsilon < \mu_0 \equiv \epsilon_F$: $F(\epsilon) = 1$
  - para $\epsilon < \epsilon_F$: $F(\epsilon) = 0$

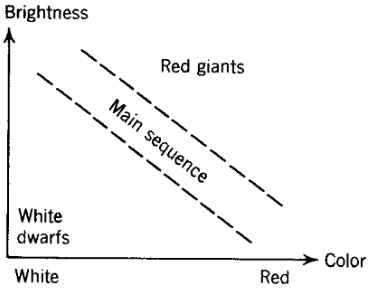
$$\Rightarrow \langle N \rangle = \left[\frac{2V}{(2\pi)^3}\right] \int d\vec{k} F[\epsilon(k)]$$

$$= \left[\frac{2V}{(2\pi)^3}\right] 4\pi \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{2V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{2\nu}\right)^{2/3}$$

$\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\nu = \langle N \rangle / V$

Enenas blancas



- Diagrama de Hertzprung-Russell en el que se ve que la luminosidad de un estrella "normal" $\propto$ color
- excepción :
    - gigante roja (anormalamente luminosa para su color roja)
    - enenas blancas (luminosidad anormalmente débil para su color blanca)

- Masa de una enena blanca $\approx M_\odot$, volumen $\approx V_\oplus$
- Alta temperatura, que viene de la estrella madre, emitida muy despacio, debido a su pequeña superficie
- Pequeña superficie $\Rightarrow$ una luminosidad débil
- Aqui, para simplificar vamos a considerar enenas blancas compuestas solamente de helio
- Estructura interna determinada para el equilibrio fuerza de gravidad ¿¡ fuerza de presíón (debido al principio de exclusión de Pauli)

Enenas blancas

- Un modelo de enenas blancas puede ser contruido a partir de estes datos :

$$Densidad \approx 10^7 \, g/cm^3 \approx 10^7 \rho_\odot$$

$$Masa \approx 10^{33} \, g \approx M_\odot$$

$$Temperatura \ en \ el \ centro \approx 10^7 \, K \approx T_\odot$$

- En resumen, una enena blanca es un sistema compuesta de helio a una grande temperatura y a un compresíon extrema.
- 10^7 K $\leftrightarrow$ 1000 eV (energia termica) $\Rightarrow$ los atomos de helio estan completamente iozinados $\Rightarrow$ podemos ver la estrella como un gas de nucleus y electrones de helio

Enenas blancas

- Consideremos el gas de electrones como un gas de Fermi ideal de densidad 10^{30} electrones/cm^3
- Energia de Fermi asociada :

$$\epsilon_F \approx \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\nu^{2/3}} \approx 20\ MeV$$

$$T_F \equiv \frac{\epsilon_F}{k} \approx 10^{11}\ K$$

- $T_F >> T_*\ \Rightarrow$ gas de electron = un gas de fermi de alta degeneracíon
- Modelo : N electrones a T=0. $\epsilon_F\ \Rightarrow$ dinamica relativista. Los N/2 nucleus de helio creen la atracción gravitacional suficiente para mantener el sistema al equilibrio. No tenemos en cuenta las radiaciones y la presíon debida a la energia cinetica de los nucleus.

Límite de Chandrasekhar

- Energiá de un electron relativista de momento $\vec{p}$ ($p = |\vec{p}|$), de spin $s = \pm\frac{1}{2}$ y de masa m_e :

$$\epsilon_{\vec{p}s} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}$$

- Energia del gas a $T = 0$:

$$E_0 = 2 \sum_{p<p_F} \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_f} dp 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)}$$

- p_F, momento de Fermi (v=V/N)

$$p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3}$$

Límite de Chandrasekhar

- Hacemos el cambio de variable $x = p/m_e c$

$$\frac{E_0}{N} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} v f(x_f)$$

- donde

$$f(x_F) = \int_0^{x_f} dx x^2 \sqrt{1 + x^2}$$

  - si $x_f << 1$

$$f(x_f) = \frac{1}{3} x_F^3 (1 + \frac{3}{10} x_F^2 + ...)$$

  - si $x_f >> 1$

$$f(x_f) = \frac{1}{4} x_F^4 (1 + \frac{1}{x_F^2} + ...)$$

Límite de Chandrasekhar

- Sea m_p la masa de un proton, M la masa de la estrella y R su radio, entonces

$$M = (m_e + 2m_p)N \approx 2m_p N$$

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

- Podemos reescribir x_F

$$x_F \equiv \frac{p_F}{m_e c} \equiv \frac{\overline{M}^{1/3}}{\overline{R}}$$

$$\overline{M} = \frac{9\pi}{8}\frac{M}{m_p}$$

$$\overline{R} = \frac{R}{\hbar/m_e c}$$

Límite de Chandrasekhar

- La presión del gas de Fermi es $P_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial V}$
- En el caso no relativista $(x_F << 1)$
  - $P_0 \approx \frac{4}{5} K \frac{\overline{M}^{5/3}}{\overline{R}^5}$
- En el caso ultra relativista $(x_F >> 1)$
  - $P_0 \approx K \left(\frac{\overline{M}^{4/3}}{\overline{R}^4} - \frac{\overline{M}^{2/3}}{\overline{R}^2} \right)$
- donde

$$K = \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3$$

Límite de Chandrasekhar

- Condición de equilibrio.
  - energia que deberiamos ejercer si no había energia de interacion gravitatoria= energia de interacción gravitatoria
- trabajo para compresar el gas de fermion del un volumen infinito hasta el radio R de la estrella

$$-\int_{\infty}^{R} P_0 4\pi r^2 dr = -\frac{\alpha\gamma M^2}{R}$$

- Diferenciando esta relacíon obtenemos la condición de equilibrio y utilizando las expreciones de $\overline{M}$ y $\overline{R}$

$$P_0 = \frac{\alpha}{4\pi}\gamma\left(\frac{8m_p}{9\pi}\right)^2\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^4\frac{\overline{M}^2}{\overline{R}^4}$$

Límite de Chandrasekhar

- Para un gas non reltivista

$$R \propto \frac{1}{M^{1/3}}$$

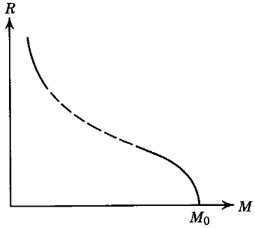
Valid para densidad debil $\Rightarrow$ M pequena y grande R

- Para un gas ultra-relativista

$$R \propto M^{2/3}\sqrt{1 - C(M/M_0)^{2/3}}$$

Con $M_0 \approx M_\odot$. Esta formula esta valid para alta densidad (o $R \to 0$)

Enenas blancas



- De la formula anterior podemos deducir que no hay enenas blancas con una masa $> M_0$
- Físicamente se entiende facilamente. Si $M > M_0$, la presíon que viene del principio de exclusión de Pauli no esta suficiente para contrar el colapso gravitatorio.
- Un calculo más minusioso nos da que $M_0 = 1.4 M_\odot$. Esto es lo que se llama la límite de Chandrasekhar

Bibliografía

S. Chandrasekhar.
On stars, their evolution and their stability.
Nobel lecture, 1983.

K. Huang.
Statistical mechanics.
John Wiley & Sons, 1987.

D. Chandler.
Introduction to modern statistical mechanics.
Oxford University Press, 1987.