TEMA 2. Estudio del movimiento: cinemática

- Descripción del movimiento: magnitudes cinemáticas
- Componentes de la velocidad y la aceleración
- Resolución numérica de la ecuación de movimiento
- Movimiento relativo
- Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Sonia Jerez Rodríguez

Departamento de Física

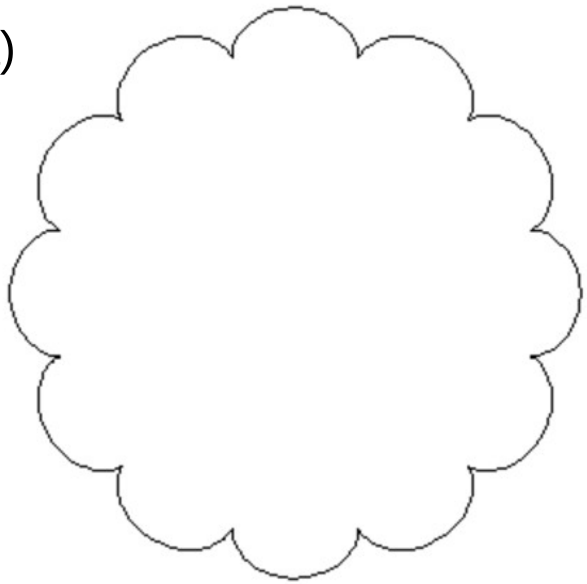
sonia.jerez@um.es

Descripción del movimiento: magnitudes cinemáticas

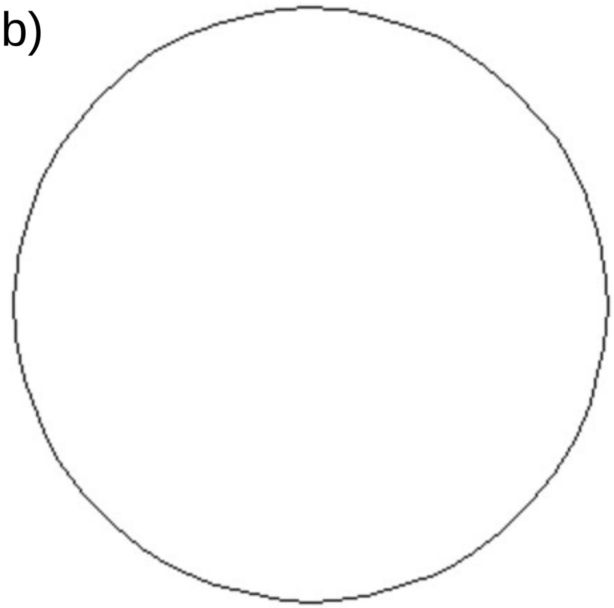
Posición, velocidad y aceleración, medidas u observadas desde un sistema de referencia.

¿Cuál es la trayectoria de la Luna?

a)

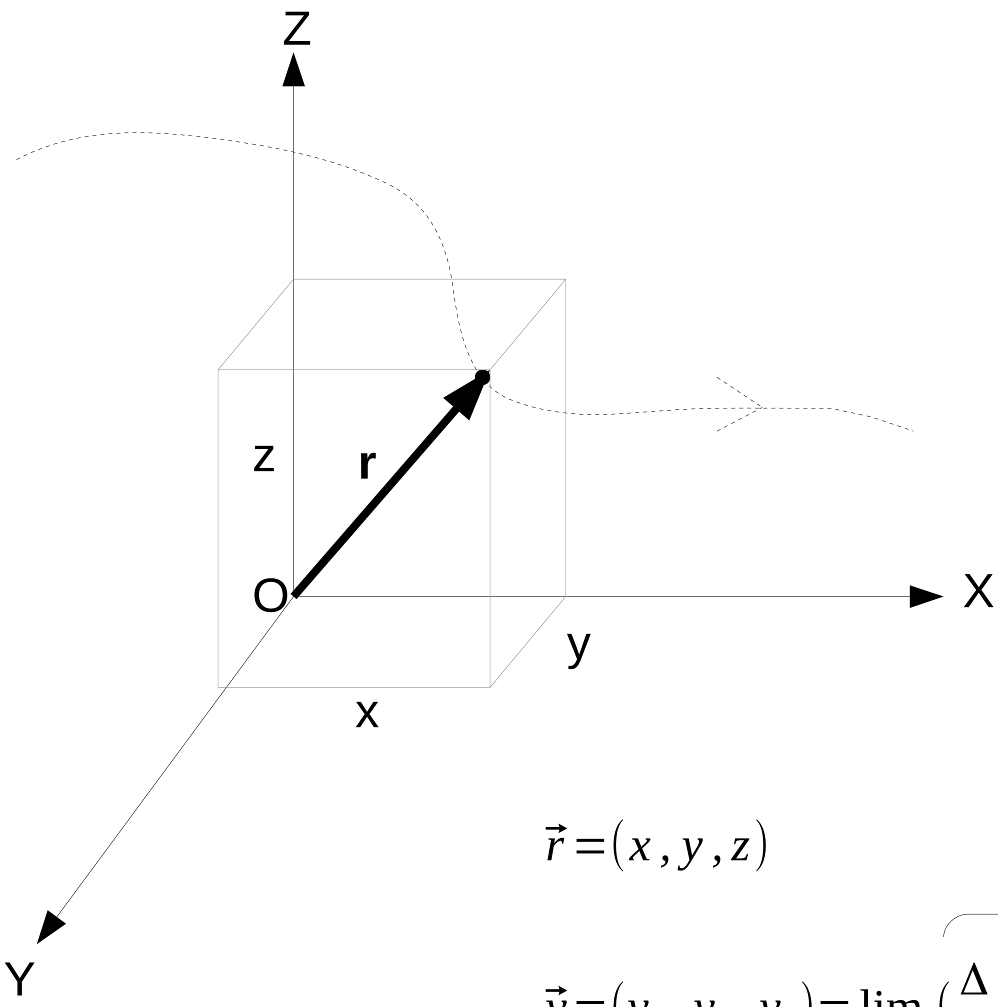


b)



https://www.youtube.com/watch?v=_QcgDiF1a14

Componentes de la velocidad y la aceleración



$$\vec{r}=(x\,,y\,,z)$$

$$\vec{v}=(v_x\,,v_y\,,v_z)=\lim_{\Delta t\to 0}\overbrace{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)}^{\text{valor medio}}=\overbrace{\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)}^{\text{valor instantáneo}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}=(a_x\,,a_y\,,a_z)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t},\frac{\Delta v_y}{\Delta t},\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)=\left(\frac{dv_x}{dt},\frac{dv_y}{dt},\frac{dv_z}{dt}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

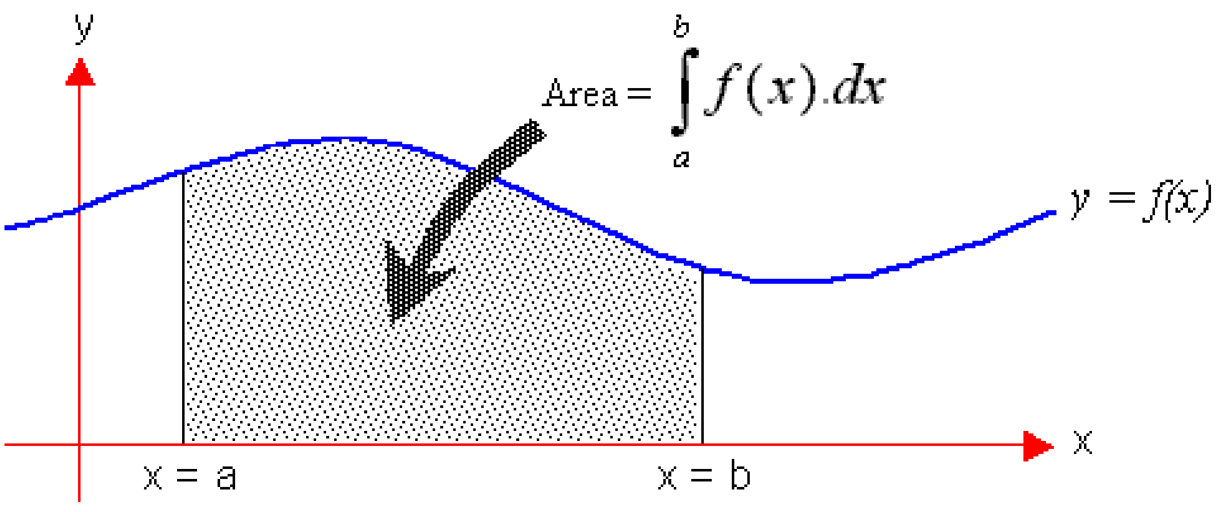
Teorema fundamental del cálculo (simplificado):

Sea f una función continua definida en el intervalo cerrado [A,B] en el cual toma valores reales. Se cumple que existe la función F contínua en dicho intervalo tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Y que para toda pareja de valores a y b tal que A≤a≤b≤B:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



Resolución numérica de la ecuación de movimiento

Ecuación de movimiento:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')dt'$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')dt'$$

$$\Downarrow$$

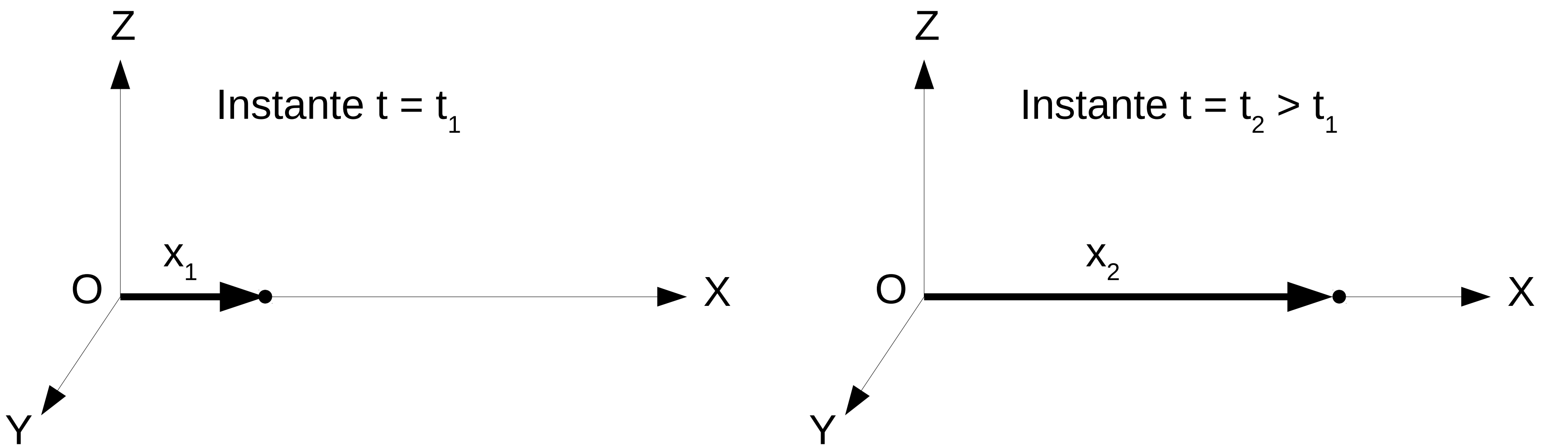
$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{v}(t_0)(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t'}\vec{a}(t'')dt''\right)dt'$$

¿Solución?

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Podremos elegir un sistema de referencia en el cual el vector posición sólo tenga componente X (que denotaremos x). La velocidad es constante (movimiento uniforme) y, dado que el movimiento es rectilíneo, tendrá también únicamente componente X en ese sistema de referencia que hemos elegido (que denotaremos v).



$$v=\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{(x_2-x_1)}{(t_2-t_1)}=cte$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'=x(t_0)+\frac{(x_2-x_1)}{(t_2-t_1)}(t-t_0)$$

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO RECTILÍNEO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow v(t)=v(t_0)+\int_{t_0}^{t} a\,dt'=v(t_0)+a(t-t_0)$$

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'=x(t_0)+v(t_0)(t-t_0)+a\int_{t_0}^{t}(t'-t_0)\,dt'$$

$$=x(t_0)+v(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

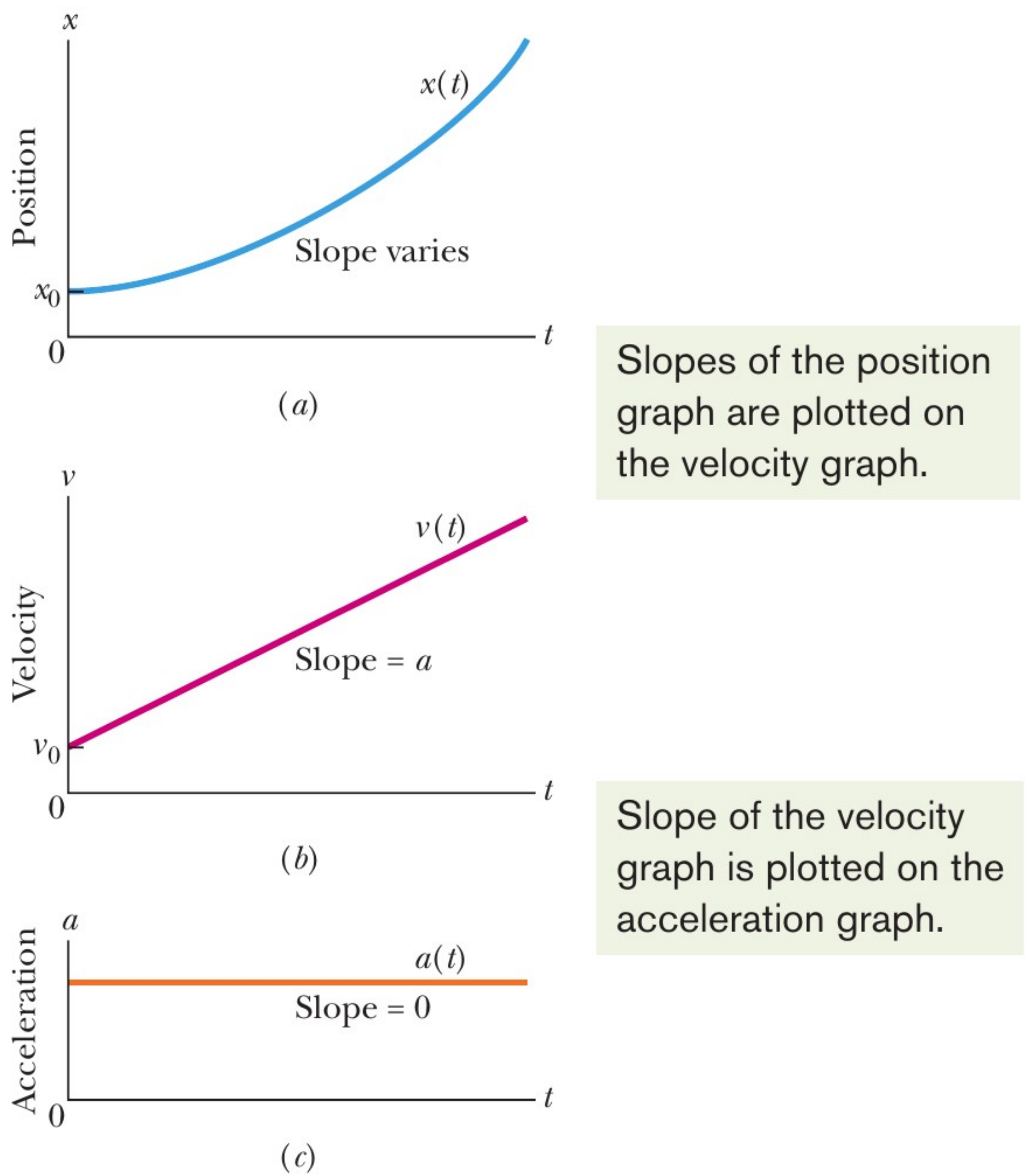
Si a=0, tenemos el caso anterior.

Podemos generalizarlo en notación vectorial:

$$\boxed{\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{v}(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2}$$

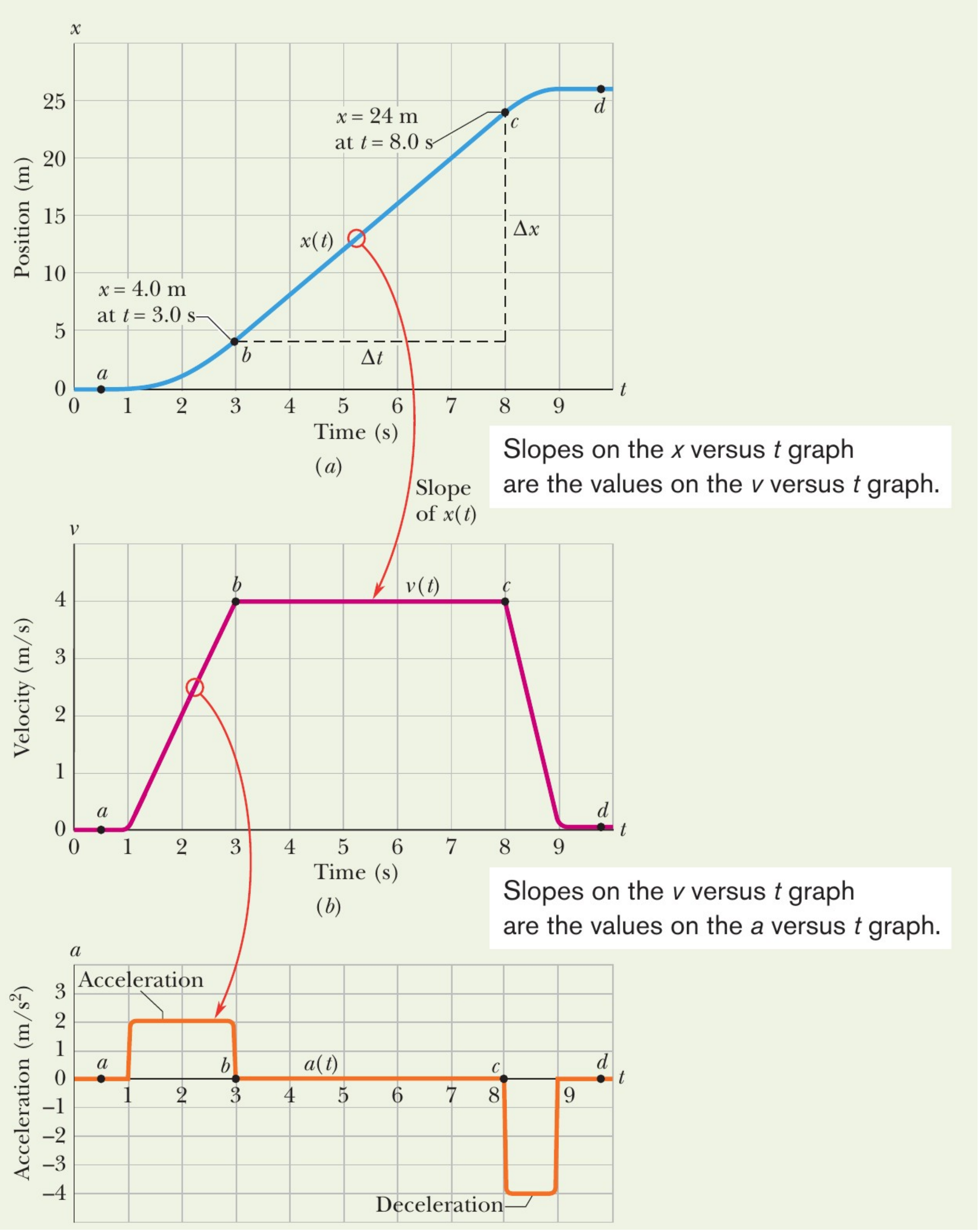
Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO RECTILÍNEO CON ACELERACIÓN CONSTANTE



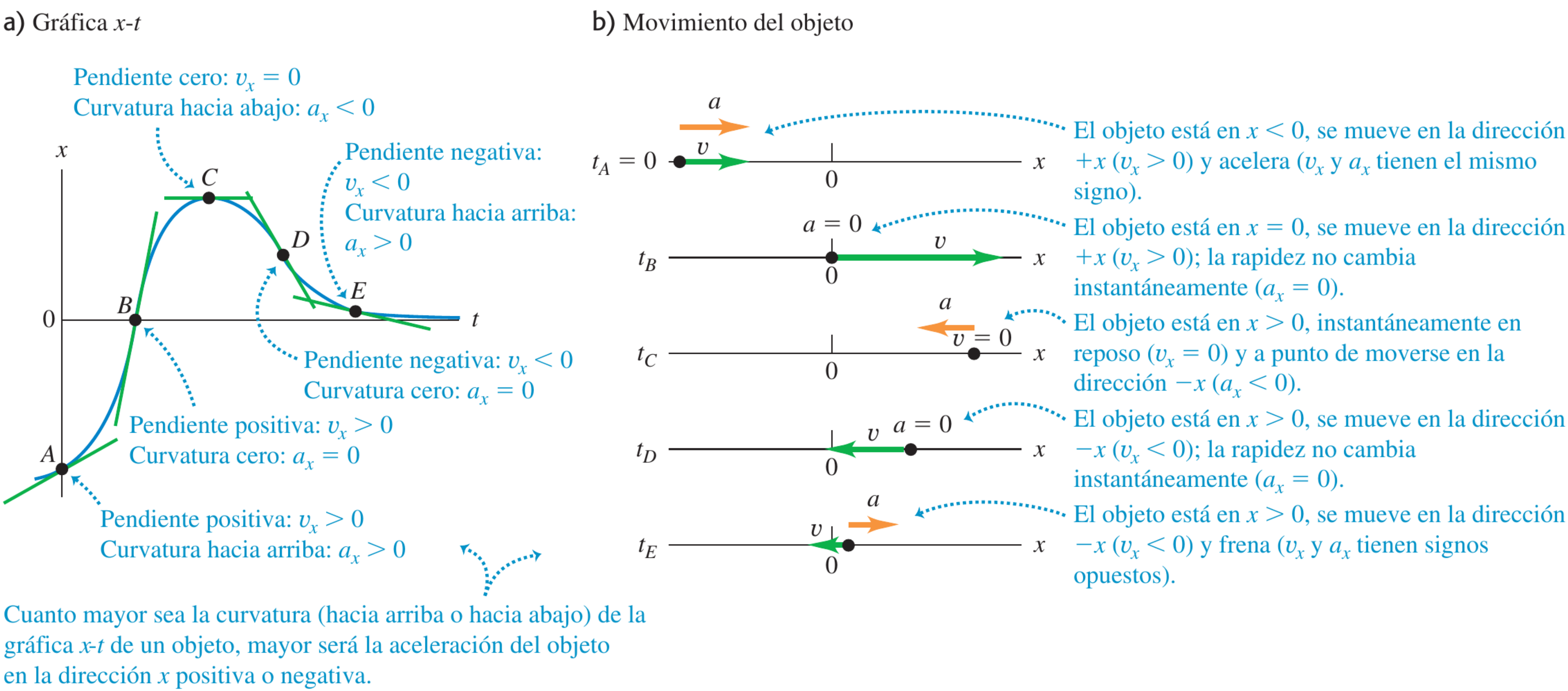
Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO RECTILÍNEO
CON ACELERACIÓN
CONSTANTE POR TRAMOS



Resolución numérica de la ecuación de movimiento

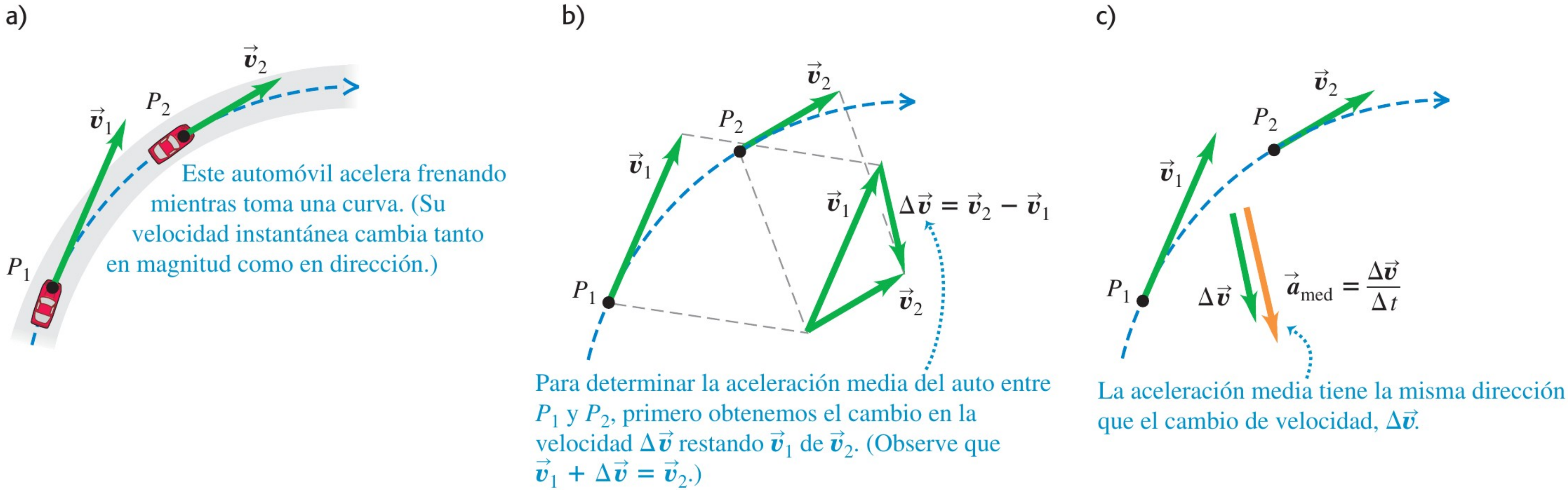
MOVIMIENTO RECTILÍNEO CON ACELERACIÓN VARIABLE



Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO CURVILÍNEO (CIRCULAR)

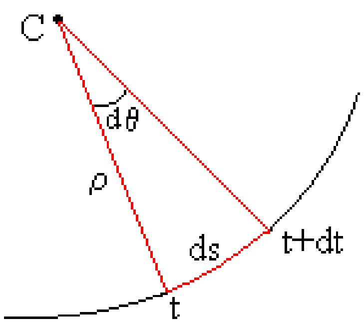
A diferencia del movimiento rectilíneo, en el que los vectores posición, velocidad y aceleración son paralelos y su dirección no cambia, en un movimiento curvilíneo, el vector velocidad cambia al menos en su dirección, por ser tangente a la trayectoria. En general, podrán cambiar tanto su módulo como su dirección.

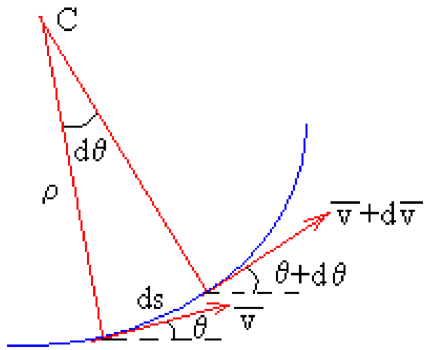


Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO CURVILÍNEO (CIRCULAR)

Componentes normal y tangencial de la aceleración

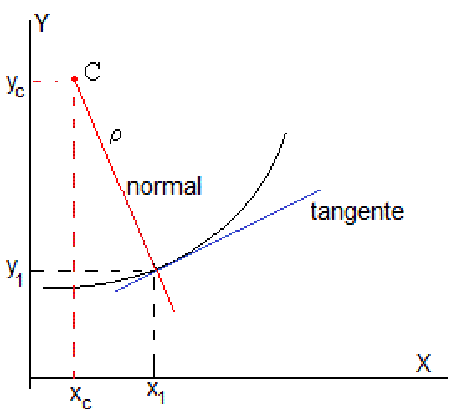


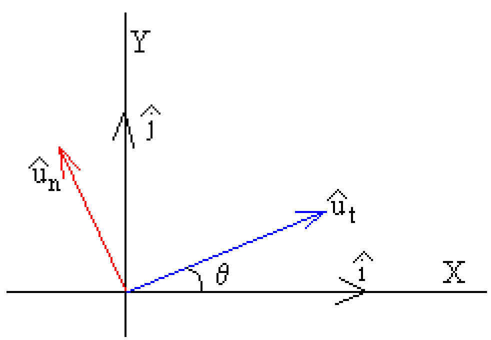


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\widehat{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\widehat{u}_t + v\frac{d\widehat{u}_t}{dt}$$

$$\widehat{u}_t = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\frac{d\widehat{u}_t}{dt} = \left(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\widehat{u}_n = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\widehat{u}_n = \frac{v}{\rho}\widehat{u}_n$$



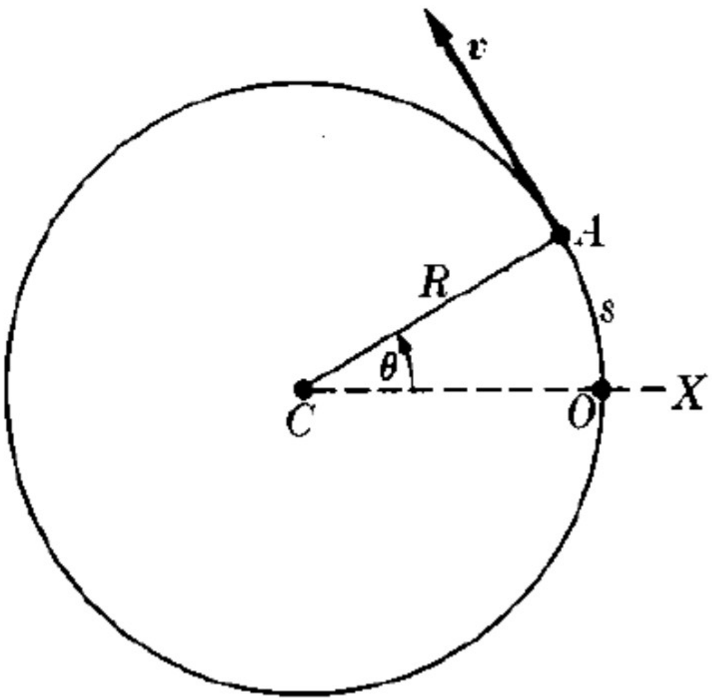


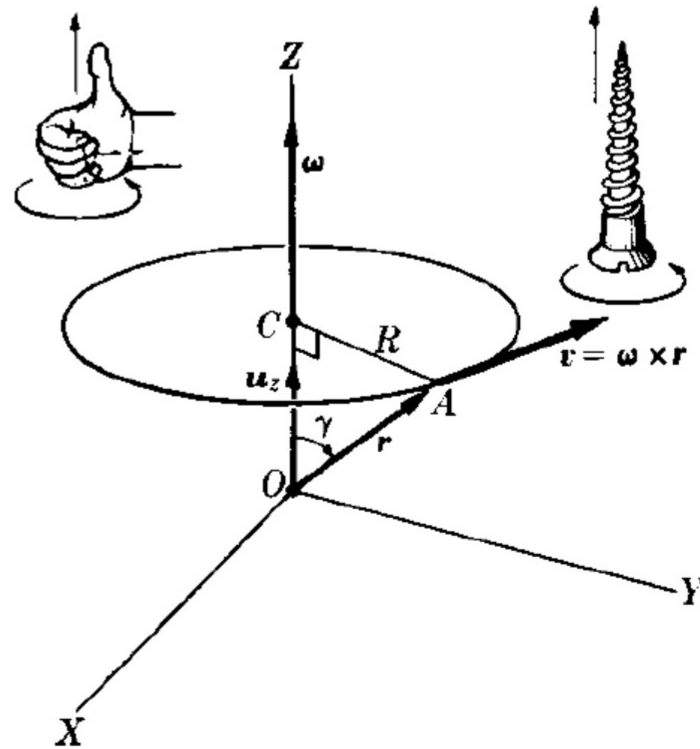
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\widehat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\widehat{u}_n$$

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

VELOCIDAD ANGULAR





$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = \quad v = \omega R$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_z \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \omega r \sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

MOVIMIENTO CIRCULAR PERIÓDICO

Si la velocidad angular es constante, el movimiento es periódico:

– Su período P es el tiempo empleado en completar una revolución: $P = \frac{t}{n}$

– Su frecuencia es el número de revoluciones por unidad de tiempo: $\nu = \frac{n}{t}$

Ambos conceptos se relacionan: $\nu = \frac{1}{P}$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt \Longrightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$$

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

ACELERACIÓN ANGULAR

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Como el movimiento circular se produce en un plano, la aceleración y la velocidad angular tienen la misma dirección, por tanto:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Integrando, si la aceleración angular es constante, obtenemos:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2}$$

Solución de la ecuación de movimiento
en coordenadas angulares para un
movimiento circular uniformemente acelerado

Resolución numérica de la ecuación de movimiento

Relacionando términos…

Si R=cte (movimiento circular), podemos escribir las componentes tangencial y normal de la aceleración como:

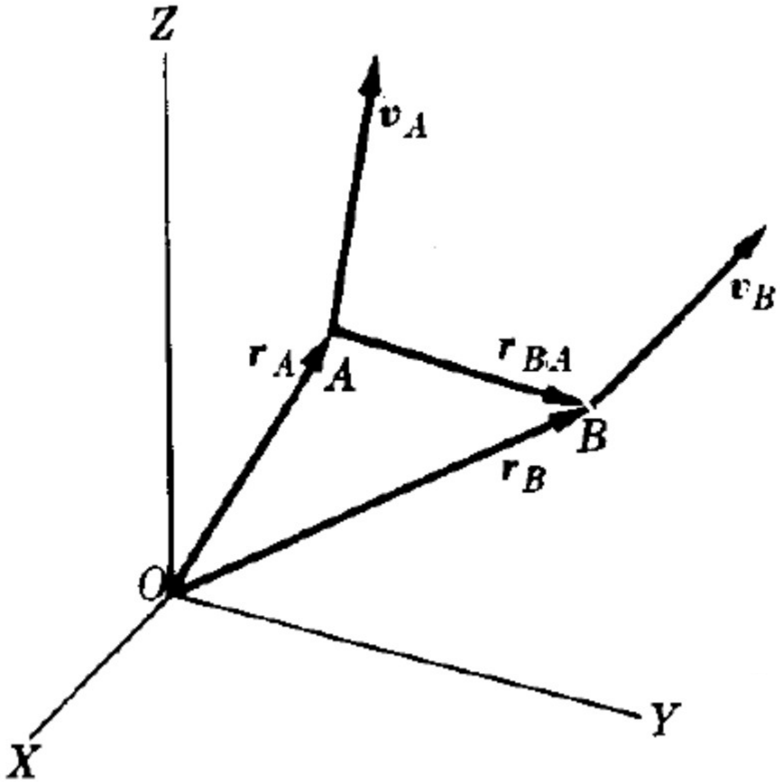
$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Y verificar que si se trata de un movimiento uniforme (no acelerado), la primera es nula. En este caso:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Movimiento relativo



$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}$$

$$\mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}$$

$$\mathbf{V}_{BA} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt}$$

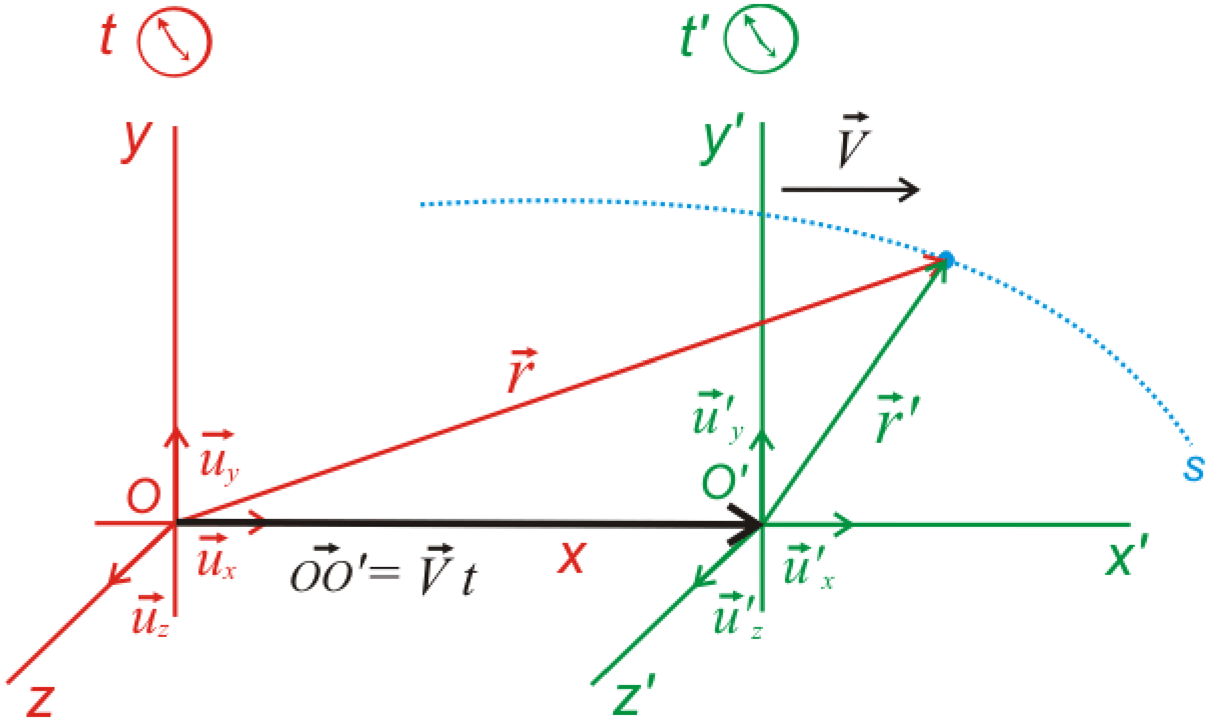
$$\mathbf{V}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$$

$$\mathbf{r}_{BA} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \Rightarrow \mathbf{V}_{BA} = -\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$$

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$

Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Movimiento relativo bajo traslación uniforme (con velocidad constante):



TRANSFORMACIONES
DE GALILEO:

$$\vec{OO}' = \vec{V}\,t$$

$$t = t' \;\Rightarrow\; \vec{O'O} = -\vec{V}\,t$$

$$\vec{r} = \vec{OO}' + \vec{r}' \;\Rightarrow\; \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}\,t$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

La aceleración es invariante bajo traslaciones a velocidad constante, en sistemas de referencia inerciales.

Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Movimiento relativo bajo traslación uniforme (con velocidad constante):

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ: (mecánica relativista) $\Rightarrow$ TRANSFORMACIONES DE GALILEO: (mecánica clásica)

Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Galileo:

$$x' = x - vt$$

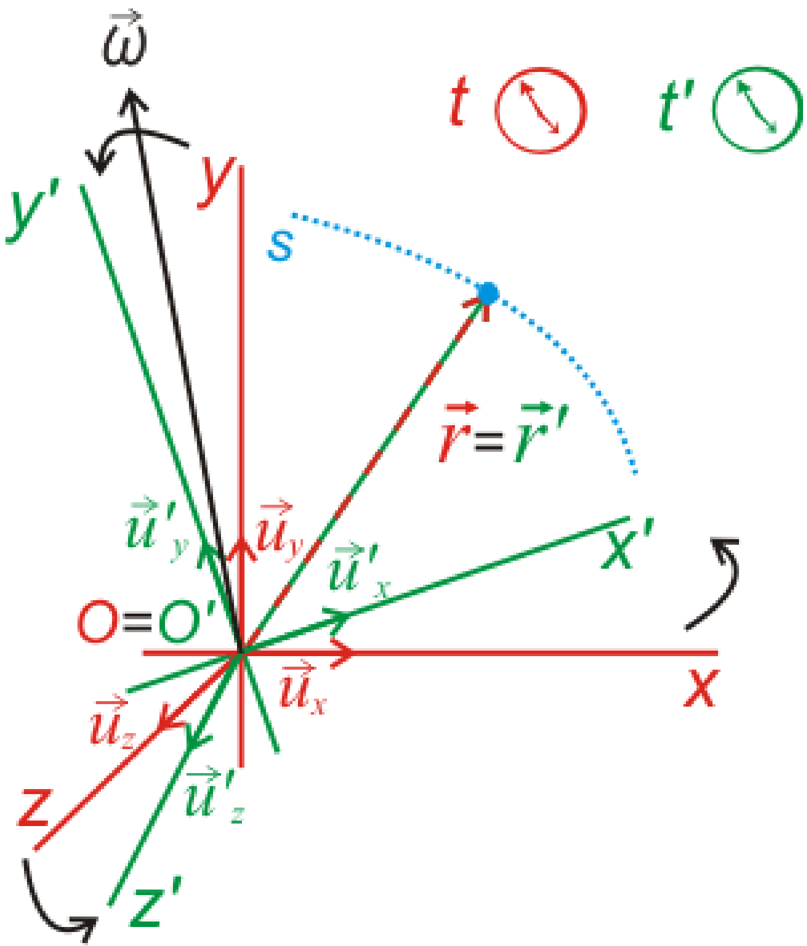
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Movimiento relativo bajo rotación uniforme (con velocidad angular constante):



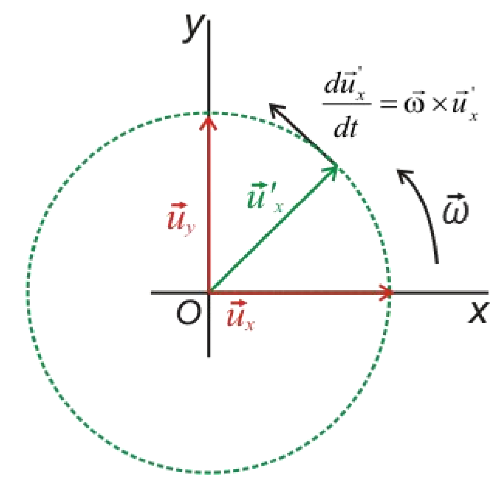
$$\vec{r}=x\,\hat{u}_x+y\,\hat{u}_y+z\,\hat{u}_z\equiv\vec{r}\,'\big|_O$$

$$\vec{r}\,'=x'\,\hat{u}'_x+y'\,\hat{u}'_y+z'\,\hat{u}'_z\equiv\vec{r}\big|_{O'}$$

$$\vec{v}=\frac{d\,\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{u}_x+\frac{dy}{dt}hay\,u_y+\frac{dz}{dt}\hat{u}_z\equiv\frac{d\,\vec{r}\,'}{dt}\bigg|_O$$

$$\frac{d\,\vec{r}\,'}{dt}\bigg|_O=\frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x+\frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y+\frac{dz'}{dt}\hat{u}'_z$$
$$+x'\frac{d\,\hat{u}'_x}{dt}+y'\frac{d\,\hat{u}'_y}{dt}+z'\frac{d\,\hat{u}'_z}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}}$$



Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Movimiento relativo bajo rotación uniforme (con velocidad angular constante):

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{\vec{\omega} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{v}\,' = v'_x \hat{u}'_x + v'_y \hat{u}'_y + v'_z \hat{u}'_z \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\vec{v}\,'}{dt} \right|_O = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right)}$$

aceleración de **coriolis** aceleración **centrípeta**

Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Movimiento relativo bajo rotación uniforme (con velocidad angular constante):

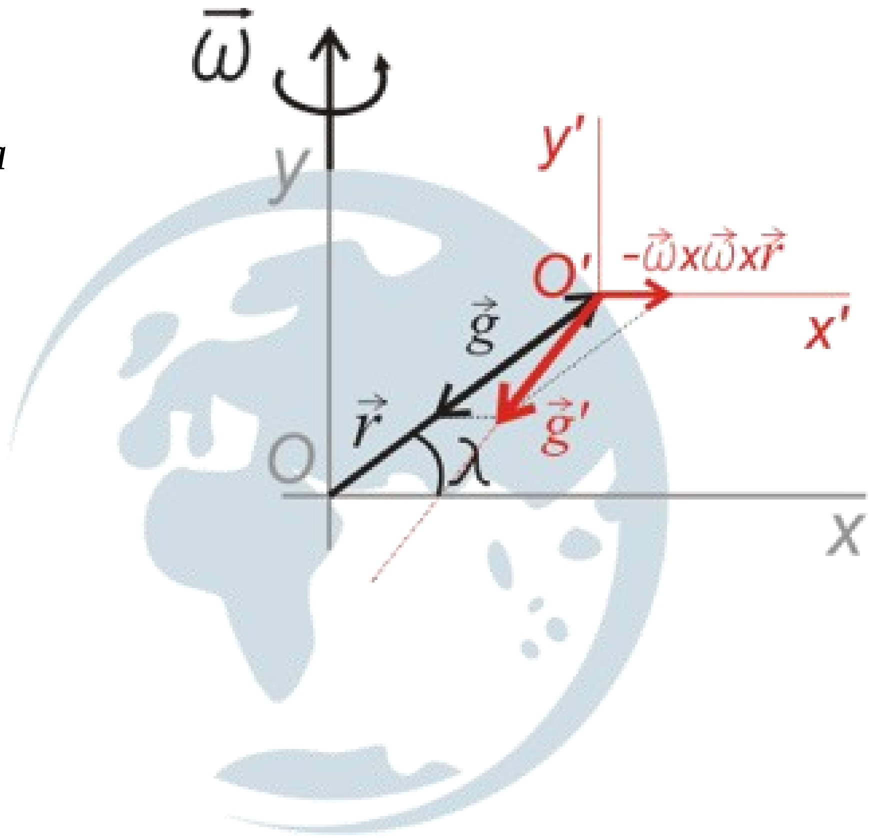
MOVIMIENTO RELATIVO A LA TIERRA

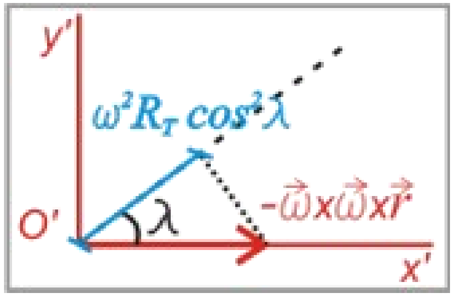
$$\vec{a}\,' = \vec{a} - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\omega = 7.292 \cdot 10^{-5}\, rad/s = 360^o/día$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{g}\,' = \vec{g}_{efectiva} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$





Sistemas de referencia y relaciones de transformación

Movimiento relativo bajo rotación uniforme (con velocidad angular constante):

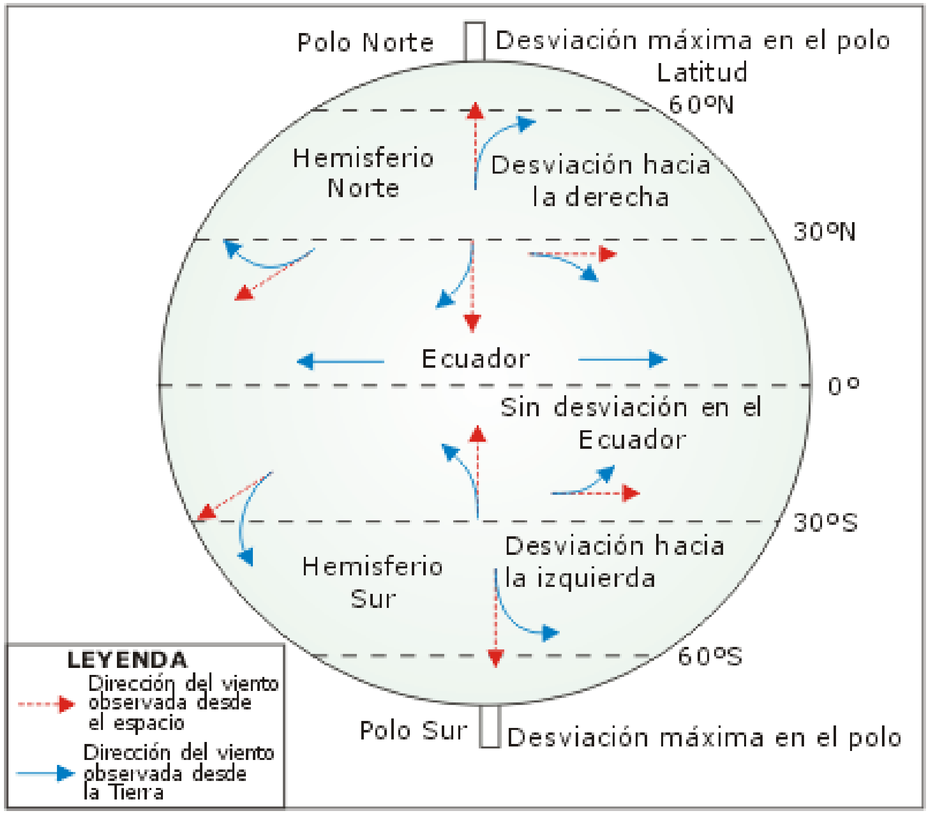
MOVIMIENTO RELATIVO A LA TIERRA

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\omega = 7.292\cdot 10^{-5}\,rad/s = 360^{o}/día$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{g}\,' = \vec{g}_{efectiva} = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



En movimientos horizontales:

$$2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'_H = f\,\vec{k}\times\vec{v}\,'_H$$

$$f = 2\,\omega\, sen\,\lambda$$

Vídeo coriolis: https://www.youtube.com/watch?v=mPsLanVS1Q8