continuación **AVANCE DEL PERIHELIO**

$$\varepsilon = \frac{\tilde E^2-1}{2} = \frac12\underbrace{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}_{\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{\tilde L}{r^2}\right)^2} - \frac{M}{r} + \frac{\tilde L^2}{2r^2} - \frac{M\tilde L^2}{r^3}$$

$\div \tilde L^2$ $$\frac{\varepsilon}{\tilde L^2} = cte = \frac12\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{1}{r^2}\right)^2 - \frac{M}{r\tilde L^2} + \frac{1}{2r^2} - \frac{M}{r^3} = \frac12\left(\cancel{-}\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - \frac{M}{\tilde L^2}u + \frac{u^2}{2} - Mu^3$$

$u=\frac1r \Rightarrow du = \frac{-dr}{r^2}$

$\left[\frac12 u'^2\right]' = \frac12 2u'u''$

$\frac{d}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d}{du}$

$$0 = \cancel{\frac{du}{d\varphi}}\frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{M}{\tilde L^2}\cancel{\frac{du}{d\varphi}} + u\cancel{\frac{du}{d\varphi}} - 3Mu^2\cancel{\frac{du}{d\varphi}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u = \frac{M}{\tilde L^2} + 3Mu^2}$$

relativista

newtoniana solución elipse

perturbativo $3GMu^2$ pequeño

$\frac{3GMu^2}{u}\sim 10^{-8}$ (Mercury)

• aprox órbita circular $u=cte \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2}=0$ $\Rightarrow$ proponemos solución $u=\frac{M}{\tilde L^2}+\sigma(\varphi)$ perturbación

cte

segundo orden

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d^2\left(\frac{M}{\tilde L^2}\right)}{d\varphi^2}}_{0} + \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}}_{\frac{d^2u}{d\varphi^2}} + \underbrace{\cancel{\frac{M}{\tilde L^2}} + \sigma(\varphi)}_{u} = \cancel{\frac{M}{\tilde L^2}} + 3M\underbrace{\left[\left(\frac{M}{\tilde L^2}\right)^2 + \cancel{\sigma^2(\varphi)} + \frac{2M\sigma(\varphi)}{\tilde L^2}\right]}_{u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma\underbrace{\left[1-3M\cdot\frac{2M}{\tilde L^2}\right]}_{\equiv\omega^2} = 3M\cdot\left(\frac{M}{\tilde L^2}\right)^2$$

• si $\frac{3MG}{c^2}\to0 \Rightarrow \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}+\sigma=0$ $\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1}$ el periodo sería 2π ☆

• pero el oscilador armónico forzado tiene period. ligeram. diferente

$$T=\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left[1-3M\cdot\frac{2M}{\tilde L^2}\right]^{-1/2} \simeq 2\pi\left(1+\frac{3M^2}{\tilde L^2}\right) = 2\pi + \underbrace{\frac{6\pi M^2}{\tilde L^2}}_{dT}$$

la órbita se cierra un poco después

Cambio fraccional de fase por órbita $\frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{dT}{T} = \frac{6\pi M^2/\tilde L^2}{2\pi} \Rightarrow d\varphi = \frac{6\pi M^2}{\tilde L^2}$

la distancia angular entre un perihelio y el siguiente es mayor que 2π en esta cantidad

que se puede escribir $\frac{d\varphi}{2\pi} = \frac34\left(\frac1v\right)^2\left(\frac{2M}{r}\right)^2$ con $v=\frac{\tilde L}{r}$

• órbita elíptica el cálculo exacto da $\frac{d\varphi}{2\pi}=\frac34\left(\frac1v\right)^2\left(\frac{2M}{r}\right)^2\frac{1}{1-e^2}$

Mercurio: $r=5.8\times10^{10}$ m ; $T=88^d$; $e=0.2$; $R_s^\odot = 3$ km $\Rightarrow d\varphi = 43.03''$/siglo

☆ La solución newtoniana era $u=\frac{M}{\tilde L^2}\left[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]$ elipse

Aproximaciones sucesivas: metemos esta u en el término relativista:

cte

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u = \frac{M}{\tilde L^2} + 3M\frac{M^2}{\tilde L^4}\left[1+e^2\cos^2(\varphi-\varphi_0) + 2e\cos(\varphi-\varphi_0)\right] = \frac{M}{\tilde L^2}+\frac{3M^3}{\tilde L^4} + \frac{6M^3}{\tilde L^4}e\cos(\varphi-\varphi_0)$$

$e^2 \to 0$ casi circular

cte

oscilador armónico forzado cuya solución es: $u=\frac{M}{\tilde L^2}\left[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)\right] + \frac{3eM^3}{\tilde L^4}\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi-\varphi_0)\simeq$

$\simeq \frac{M}{\tilde L^2}\left[1+e\cos\psi\right]$ con $\psi = \underbrace{\varphi-\varphi_0}_{\Delta\varphi} - \frac{3M^2}{\tilde L^2}\varphi$ $\Rightarrow$ elipse con precesión

pequeño

Variación de φ para que ψ cambie en 2π: $\Delta\psi = \Delta\varphi - \frac{3M^2}{\tilde L^2}\Delta\varphi \equiv 2\pi$

$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\left(1-\frac{3M^2}{\tilde L^2}\right)^{-1}\simeq 2\pi\left(1+\frac{3M^2}{\tilde L^2}\right)$ $\Rightarrow$ el exceso es $6\pi\frac{M^2}{\tilde L^2}$ por órbita

De los 5600''/siglo medidos, todos menos 43.03''/siglo se explican con momento cuadrupolar del Sol y perturbaciones otros planetas