$\boxed{5.}$ $\boxed{\text{GEODÉSICAS}}$

Para extraer las geodésicas en 4D curvado ya no nos sirve la estratagema de hacer una sección 3D porque no sabemos dibujarla. A partir de aquí hay que aprender a extraer las geodésicas a partir de las componentes $g_{\mu\nu}$ de la métrica.

- En SLI $\{X^\alpha\}$, un suceso $P[\underset{x^0}{t}, \underset{x^1}{x}, \underset{x^2}{y}, \underset{x^3}{z}]$ y otro muy cercano $P+dP$ $[\underset{dx^0}{t+dt}, \underset{dx^1}{x+dx}, \underset{dx^2}{y+dy}, \underset{dx^3}{z+dz}]$ estarán separados por un intervalo:

$$ds^2 = \underbrace{-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2}_{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} \qquad \text{en cartesianas: } \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Relatividad Especial.

- En SR general $\{x^\alpha\}$, cuya transformación $x^\alpha \longleftrightarrow X^\alpha$ conociéramos, transf. lineales generales el mismo intervalo se expresa:

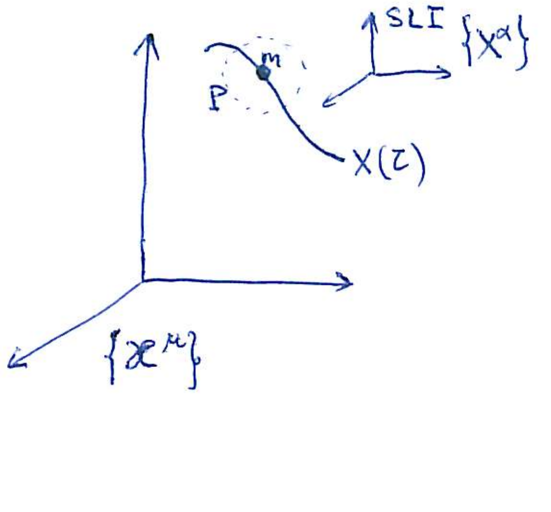
$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu\right)\left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu\right) = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

con $g_{\mu\nu} = \dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \dfrac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$ que definen la métrica en el entorno de P y también lejos de P.

- En SLI $\{X^\alpha\}$, lejos de P ya no vale la R.E.. Ya no valen los $\eta_{\mu\nu}$ sino: $ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu$. Eso sí: $\tilde{g}_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$

- Podremos, pues, relacionar los coeficientes de la métrica en ambos sistemas de coordenadas: $g_{\mu\nu} = \dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}$

Vayamos ahora directos hacia las geodésicas. Para ello, consideremos el movimiento de una partícula en caída libre



En SLI, la partícula se mueve como una partícula libre ($\vec{f}=0$) en R.E.:

$$F = m\frac{du}{d\tau} = 0 \implies \frac{d^2X^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad \text{aceleración nula}$$

$\tau \equiv$ tiempo propio de la partícula

La trayectoria de la partícula puede escribirse de forma paramétrica: $\{X^\alpha(\tau)\}$ donde hemos elegido $\lambda = \tau$ como parámetro.

El intervalo de tiempo propio entre dos sucesos cercanos asociados al movimiento de la partícula es $d\tau^2 = \frac{-ds^2}{c^2}$,

pues, en general, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$ y el tiempo propio entre P y P+dP es el medido cuando la partícula está inmóvil ($dx = dy = dz = 0$), es decir cuando el intervalo entre P y P+dP es puramente temporal ($\Rightarrow dt = d\tau$).

- En SR general $\{\mathscr{x}^\mu\}$ el movimiento de la partícula entorno al suceso P estará parametrizado por otra curva $\{\mathscr{x}^\mu(\tau)\}$.

Usando las transformaciones entre los dos sistemas:

$$\frac{dX^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma}\frac{d\mathscr{x}^\sigma}{d\tau}$$, la ecuación del movto es:

$$0 = \frac{d^2X^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma}\frac{d\mathscr{x}^\sigma}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma}\right)\frac{d\mathscr{x}^\sigma}{d\tau} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma}\frac{d^2\mathscr{x}^\sigma}{d\tau^2} =$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \mathscr{x}^\lambda}\frac{d\mathscr{x}^\lambda}{d\tau} \qquad = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma \partial \mathscr{x}^\lambda}\frac{d\mathscr{x}^\sigma}{d\tau}\frac{d\mathscr{x}^\lambda}{d\tau} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma}\frac{d^2\mathscr{x}^\sigma}{d\tau^2}$$

Multiplicamos por $\frac{\partial \mathscr{x}^\mu}{\partial X^\alpha}$ y sumamos para todos los valores de α:

$$0 = \underbrace{\boxed{\frac{\partial \mathscr{x}^\mu}{\partial X^\alpha}\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma \partial \mathscr{x}^\lambda}}}_{\equiv}\frac{d\mathscr{x}^\sigma}{d\tau}\frac{d\mathscr{x}^\lambda}{\partial \tau} + \underbrace{\frac{\partial \mathscr{x}^\mu}{\partial X^\alpha}\cdot\frac{\partial X^\alpha}{\partial \mathscr{x}^\sigma}}_{\delta^\mu_\sigma}\frac{d^2\mathscr{x}^\sigma}{d\tau^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\mathscr{x}^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\frac{d\mathscr{x}^\sigma}{d\tau}\cdot\frac{d\mathscr{x}^\lambda}{d\tau} = 0}$$ ECUACIONES DE LAS GEODÉSICAS (partícula sometida solamente a $\vec{g}$)

se ve la forma que tendrá la derivada covariante

donde $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}$ son los <u>símbolos de Christoffel</u>, que representan la influencia gravitatoria que, como sabemos, está conectada con la métrica. Por tanto, habrá una relación $\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \longleftrightarrow g_{\mu\nu}$, que pasamos a buscar, suponiendo que en el sistema SLI, cuando nos separamos ligeramente de P (suceso al que SLI está asociado), la métrica se desvía <u>suavemente</u> de la de R.E., es decir: $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial X^\mu}(P) = 0$ y también $\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial \mathscr{x}^\sigma}(P) = \cancel{\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial X^\lambda}}\frac{\partial X^\lambda}{\partial \mathscr{x}^\sigma} = 0$

RELACIÓN ENTRE $g_{\mu\nu}$ Y $\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}$

* Multiplicando ambos miembros de la definición de símbolos de Chr.:

$$\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu}\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} = \underbrace{\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}}_{\delta^\beta_\alpha}\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\sigma\partial x^\lambda}.$$

* Las derivadas de los coeficientes métricos son:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left[\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\tilde g_{\alpha\beta}\right] = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\right)\tilde g_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\right)\underbrace{\cancel{\frac{\partial \tilde g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}}}_{0 \text{ en } P\ (\text{"suavidad"})} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\sigma\partial x^\mu}}_{\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\mu}}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\tilde g_{\alpha\beta} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}}_{\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}}\tilde g_{\alpha\beta}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\tilde g_{\alpha\beta}}_{g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\mu}} + \underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}\tilde g_{\alpha\beta}}_{g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}}$$

$$g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\mu} + g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

* Haciendo uso de esta última expresión, la combinación de derivadas:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = \left(g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\mu}+g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu}\right) + \overbrace{\left(g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}+g_{\sigma\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\right)}^{\sigma\to\mu,\ \mu\to\sigma \text{ respecto al primer paréntesis}}$$

$$- \overbrace{\left(g_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\nu\mu}+g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}\right)}^{\nu\to\sigma,\ \sigma\to\nu \text{ respecto 1er paréntesis}} = 2\,g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}$$

* Definiendo la matriz inversa de los coeficientes métricos ($g^{\mu\nu}$):

$$g^{\lambda\nu}\cdot g_{\nu\rho}\equiv\delta^\lambda_\rho$$

* Y multiplicando miembro a miembro por $\frac{g^{\lambda\nu}}{2}$ se obtiene:

$$\boxed{\frac12 g^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\right) = \underbrace{g^{\lambda\nu}\cdot g_{\rho\nu}}_{\delta^\lambda_\rho}\cdot\Gamma^\rho_{\mu\sigma} = \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}$$

En notación concisa:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} = \frac{g^{\lambda\nu}}{2}\left\{g_{\nu\sigma,\mu}+g_{\mu\nu,\sigma}-g_{\mu\sigma,\nu}\right\}$$

donde $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\equiv g_{\mu\nu,\sigma}$.

* No olvidar que $g_{\mu\nu}$ están relacionados con ϕ (potencial grav.).
En límite newtoniano y campo débil: $g_{00}=1+\frac{2\Phi(r)}{c^2}=1-\frac{2GM}{c^2r}$