Ecuación de Kepler

De Wikipedia, la enciclopedia libre

Kepler descubrió las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Los planetas giran en una órbita elíptica, uno de cuyos focos **F** lo ocupa el Sol, pero **no** lo hacen con un movimiento uniforme, sino según la ley de las áreas barriendo el radio vector Sol-Planeta áreas iguales en tiempos iguales. El plasmado matemático de esta ley es la **Ecuación de Kepler**:

$$M = E - e \operatorname{sen} E$$

donde **M** es la anomalía media o ángulo que recorrería un planeta ficticio que se moviese con movimiento uniforme por la circunferencia principal, e es la excentricidad de la elipse situada entre **0<=e<1** y **E** es la anomalía excéntrica que es la incógnita que nos permitirá resolver el problema.

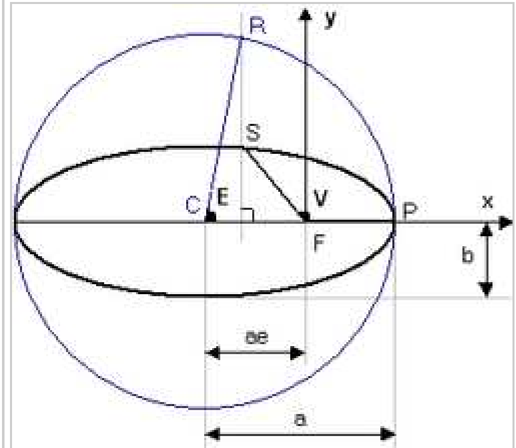


Diagrama que permite demostrar la ecuación de Kepler y por tanto calcular la posición de un planeta en su órbita en un instante t cualquiera.La elipse es la órbita del planeta, con la estrella ocupando el foco F. El objetivo es calcular el tiempo que necesita el planeta para moverse desde el perihelio (para el Sol en general periapsis) *P* a un punto dado *S* . La circunferencia principal es la circunferencia auxiliar de radio a que usaremos para demostrar la ecuación de Kepler.

Contenido

- 1 Movimiento medio
- 2 Demostración de la Ecuación de Kepler
- 3 Métodos de resolución de la Ecuación de Kepler
  - 3.1 Método gráfico
  - 3.2 Método de las aproximaciones sucesivas
  - 3.3 Método de Newton
- 4 Movimiento elíptico
- 5 Nota final

Movimiento medio

Supongamos que el planeta da una vuelta al Sol en un tiempo denominado periodo T.

El movimiento medio n es el ángulo girado en la unidad de tiempo suponiendo movimiento uniforme **n=360/T** en grados/día si el periodo se expresa en días. Usando la 3ª ley de Kepler

$$\frac{G(M+m)T^2}{a^3} = 4\pi^2$$ resulta:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$ en radianes/día siendo **a** el semieje mayor de la órbita.

Se obtiene **n** en radianes/día o en º/día si **a** se expresa en UA mediante:

$$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

donde *k* es la constante de Gauss, o el movimiento medio diario de la Tierra cuyo valor es 0,01720209895 radianes/día ó 0,9856076686 grados/día.

Si t_0 es el instante de paso por el perihelio P, la anomalía media en un instante t es:

$$M = n \times (t - t_0)$$

Demostración de la Ecuación de Kepler

El semieje mayor de la órbita es *a*, y el semieje menor es *b*. La excentricidad de la órbita es *e*, y la estrella ocupa uno de los focos *F*, a una distancia $c = ae$ del centro *C* de la elipse. El planeta está en el perihelio en *P* en momento $t = 0$ o más en general en el momento t_0 . Pretendemos encontrar el tiempo $T = t - t_0$ que tarda el planeta en alcanzar *S*.

La circunferencia principal tiene una relación de afinidad entre sus ordenadas y las ordenadas de la elipse pues son más grandes en un factor a / b . Para cualquier punto dado *S* de la elipse puede trazarse al punto correspondiente punto *R* en la circunferencia principal. El ángulo *PCR* es la **anomalía excéntrica** (el ángulo *E*) mientras que el ángulo *PFS* es la **anomalía verdadera**

Sabemos que por la segunda ley de Kepler las áreas barridas por el radio vector del planeta en tiempos iguales son iguales. El área *PFR* es la homóloga del área *PFS* barrida por el planeta:

$$PFR = \frac{a}{b} PFS$$

Sabemos que, en el tiempo del periodo orbital τ, el planeta barre el área entera de la elipse πab. Por ello en un tiempo T / τ el área barrida será:

$$PFS = \frac{T}{\tau} \pi ab$$

y sustituyendo esta expresión en la anterior:

$$PFR = \frac{T}{\tau} \pi a^2$$

Pero el área *PFR* es la resta de las áreas *PCR* y *FCR*:

$$PFR = PCR - FCR$$

El área *PCR* es el sector circular cuyo ángulo central es E . Como el círculo tiene un área total πa^2 y la fracción es $E / 2\pi$, tenemos:

$$PCR = \frac{a^2}{2} E$$

Mientras que el área *FCR* es un triángulo cuya base es la semi-distancia focal *FC* de longitud $c = ae$, y cuya altura es $a \operatorname{sen} E$:

$$FCR = \frac{a^2}{2} e \operatorname{sen} E$$

Por lo que:

$$PFR = \frac{T}{\tau}\pi a^2 = \frac{a^2}{2}E - \frac{a^2}{2}e\,\mathrm{sen}\,E$$

Dividiendo por a^2 / 2:

$$\frac{2\pi}{\tau}T = E - e\,\mathrm{sen}\,E$$

Pero $n = 2\pi /\ tau$ es el movimiento medio y si multiplicamos por T obtenemos la anomalía media $M = n\,T = n\,(t - t_0)$ lo que nos da la ecuación de Kepler:

$$M = E - e\,\mathrm{sen}\,E$$

Nota: Para entender la importancia de esta fórmula, considere que es una fórmula análoga que da el ángulo θ girado en un movimiento circular y uniforme (velocidad angular constante) *n*:

$$n\,T = \theta$$

Métodos de resolución de la Ecuación de Kepler

Para un tiempo t dado, **M** es conocido, con la que queda una ecuación trascendente en **E** cuya resolución vamos a abordar.

Método gráfico

- **Ejemplo:**

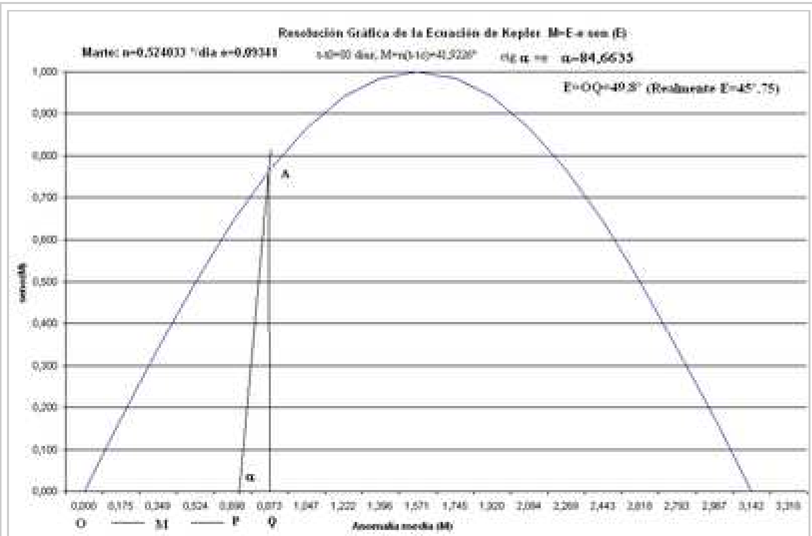
Supongamos el planeta Marte cuyo año sidéreo=686,98 días y queremos calcular la **anomalía excéntrica** 80 días después de que el planeta pase por el perihelio

El movimiento medio n=0,524033º/día y la anomalía media: $M = n \times (t - t_0)$=41º,9226

Para resolver la ecuación de Kepler, en el gráfico de dibuja una sinusoide. Sobre el eje x se mide M=OP y se dibuja una recta con inclinación sobre el eje x tal que:

cotg (α) = e .

Entonces $PQ = e \times \sin E$ con lo que $OQ = OP + PQ = M + e \times \sin E$



Método gráfico aproximado de resolver la ecuación de Kepler

Aplicada para Marte T=686,98 días, e=0,09341 y 80 días tras el paso por el perihelio. La anomalía media vale M=41,9226 y la a. excéntrica sale E=49,8 cuando debería salir 45,75.

Método de las aproximaciones sucesivas

Se escribe la ecuación de Kepler en la forma:

$$E = M + e \times \sin E$$

Como normalmente la excentricidad **e** es pequeña puede despreciarse y la aproximación inicial E_0=M. Ahora se aplica la ecuación de Kepler para obtener un nuevo valor:

$$E_1 = M + e \times \sin E_0$$ y en general

$$E_i = M + e \times \sin E_{i-1}$$

se itera el cálculo las veces necesarias hasta que la diferencia entre E_{i-1} y E_i es menor que una cantidad prefijada o error.

Un script de Java[1] (http://www.geocities.com/xgarciaf/java/kepler1.htm) que hace esto es:

```
with (Math) {
    n=2*PI/P;
    M=n*T;
    E0=M;
    E1=M+ex*sin(E0);
    while (abs(E1-E0)>0.0001) {
            E0=E1;
            E1=M+ex*sin(E0);
    }
```

Se ha usado la estructura de *while (condición)* y así mientras se cumpla la condición seguirá iterando.

Nota importante:

La ecuación se puede resolver en radianes o en grados en este último caso hay que hacer homogéneos ambos sumandos convirtiendo radianes a grados:

$$E_i = M + \frac{180}{\pi} \times e \times \sin E_{i-1}$$

En el applet se resuelve en radianes.

- **Ejemplo:**

Supongamos que queremos calcular la **anomalía excéntrica** del planeta Marte, 80 días después de que el planeta pase por el perihelio y con un error menor que 0,00001. La siguiente tabla resume los resultados de las diferentes iteraciones:

Iteración	Ei	Diferencia
0	41,92260	
1	45,49841	3,57581
2	45,73981	0,24140
3	45,75558	0,01577

4	45,75661	0,00103
5	45,75668	0,00007
6	45,75668	0,000004

Con sólo 6 iteraciones se puede ver que E=45,75668 con todas sus cifras exactas.

Nota: Cuando la excentricidad se acerca a 1 se necesitan muchas más iteraciones para conseguir el mismo error.

Método de Newton

El método de Newton consiste en calcular una raíz de una ecuación f(x)=0 mediante la expresión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Para ello basta con escribir la ecuación de Kepler como

$$E - e \times \sin E - M = 0$$

y aplicar este método.

Movimiento elíptico

- Ver artículo principal Movimiento elíptico

Cuando ya se han calculado la anomalía media M, y mediante la resolución de la **Ecuación de Kepler** la anomalía excéntrica E y luego la anomalía verdadera V, todavía quedan muchas relaciones que tratar. A modo de ejemplo:

- Posición cartesiana (x, y) del planeta respecto a la estrella:
  - En función anomalía excéntrica:

$$x = a \times (\cos E - e)$$

$$y = a \times \sqrt{1 - e^2} \times \sin E$$

-
  - En función anomalía verdadera:

$$x = r \times \cos V$$

$$y = r \times \sin V$$

- Radio vector
  - En función anomalía excéntrica

$$r = a \times (1 - e \times \cos E)$$

-
  - En función anomalía verdadera:

$$r = \frac{a \times (1 - e^2)}{1 + e \times \cos V}$$

- Desarrollos en serie de potencias de **e** de E, V y r:

$$E = M + e \times \sin M + \frac{e^2}{2} \times \sin(2 \times M) + ...$$

$$V = M + 2 \times e \times \sin M + \frac{5e^2}{4} \times \sin(2 \times M) + ...$$

$$r = a \times (1 - e \times \cos M + \frac{e^2}{2} \times (1 - \cos(2 \times M))) + ...$$

donde se han desarrollado hasta 2º orden.

Nota final

Mientras que la ley de las áreas es general no sólo para cuerpos atraídos por la Ley de Newton o ley de la inversa del cuadrado de la distancia, sino para todas las fuerzas centrales, cuya dirección está en la línea que une las partículas. La **Ecuación de Kepler** es válida solamente para cuerpos que se mueven en una órbita cerrada o elíptica con **0<=e<1** .

Para órbitas abiertas con **e>1** (Hipérbola) la misma ley de las áreas lleva a una formulación ligeramente diferente. (Resolución del movimiento hiperbólico)

Véase también:

- Anomalía media
- Anomalía excéntrica
- Anomalía verdadera

Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_Kepler"
Categoría: Mecánica celeste
