UNIVERSIDAD
DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Facultad de Química

SOLUCIONES FÍSICA DEL COSMOS
— JULIO 2015 —

(1) Métrica de Schwarzschild $\left([\,] \equiv 1 - \frac{2M}{r}\right)$

$$ds^2 = -[\,]dt^2 + \frac{dr^2}{[\,]} + r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

con $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ (elección plano orbital)
$ds^2 = 0$ (luz)
$dr = 0$ (órbita circular: r fija)
queda $0 = -[\,]dt^2 + r^2 d\varphi^2$

Despejando el tiempo: $dt = \dfrac{r}{\sqrt{[\,]}}\, d\varphi$

Integrando: $t = \dfrac{2\pi r}{\sqrt{[\,]}}$, función cuyo mínimo se encuentra en $\boxed{r = 3M}$ (*)

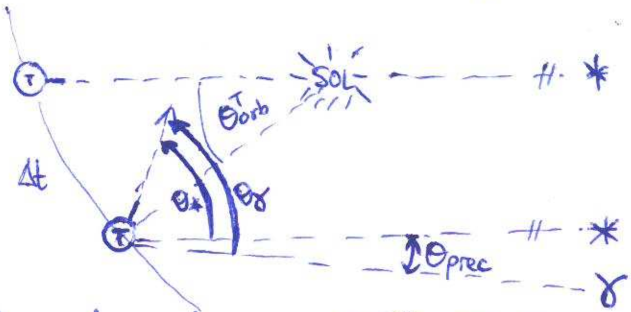
(*) Equivale a minimizar $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ (tb valdría minimizar $\dfrac{x^3}{x-2}$).

$$y' = \left[1-\frac{2}{x}\right]^{-1/2} - \frac{1}{x\left[1-\frac{2}{x}\right]^{3/2}} = \left[1-\frac{2}{x}\right]^{-1/2}\left\{1 - \frac{1}{\underbrace{x\left[1-\frac{2}{x}\right]}_{x-2}}\right\} = 0 \Rightarrow 1 = x-2 \Rightarrow x = 3$$

con $x \equiv \dfrac{r}{M}$

El periodo orbital correspondiente es: $\boxed{t_{min} = t(r=3M) = 6\sqrt{3}\,\pi M}$

(2)



$\theta_\gamma = \theta_* + \theta_{prec} \Rightarrow$
sidéreo, sideral, preces. equin.

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_\gamma}\Delta t = \frac{2\pi}{T_*}\Delta t + \frac{2\pi}{T_{prec}}\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_\gamma} = \frac{1}{T_*} + \frac{1}{T_{prec}} \Rightarrow \boxed{T_\gamma = \frac{T_* \cdot T_{prec}}{T_* + T_{prec}} = 23.934468\,h < T_{*\,sideral}}$$

$T_* = 23.934471\,h$; $T_{prec} = 25781 * 365.25 * 24\,h$

(3) ver AGRUPACIONES_ESTELARES.pdf en la web de la asignatura

- Binarias visuales: se observan las dos estrellas. Orientación del plano orbital y periodo orbital.
- Binarias espectroscópicas: desplazamiento Doppler periódico en sus espectros.
- Binarias eclipsantes: plano orbital contiene la línea de visión. Curva de luz: tamaño y temperatura relativos.

Campus Universitario de Espinardo • Apdo. Correos 4.021
Telf.: 968 36 73 75 • Fax: 968 36 41 48
30071 Murcia

UNIVERSIDAD DE MURCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Facultad de Química

SOLUCIONES FÍSICA DEL COSMOS
– Julio 2015, continuación –

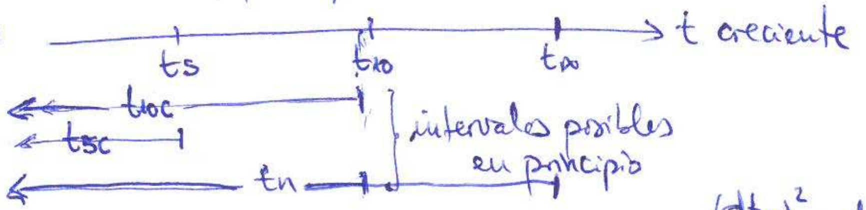
(4) sin necesidad de hacer cálculos debemos saber que:

a) $t_n < t_\infty$ porque la nave está en una zona más curvada del espacio-tiempo (t_∞ sufre redshift gravitatorio)

b) $t_5 < t_{10} < t_\infty$ por la misma razón (todos estacionarios en este caso)

c) $t_{10c} < t_{10}$ por efecto "Lorentz" de relatividad especial (ambos en mismo potencial grav.)

d)



e) caída radial de la nave: $-1 = -[\ ]\left(\frac{dt_\infty}{dt_n}\right)^2 + \frac{1}{[\ ]}\left(\frac{dr}{dt_n}\right)^2 = -\frac{\tilde{E}^2}{[\ ]} + \frac{1}{[\ ]}\left(\frac{dr}{dt_n}\right)^2$ *

conservación energía nave: $\tilde{E} = \frac{dt_\infty}{dt_n}\left[1-\frac{2M}{r}\right]$ **

• reposo en r_{10} ⇒ $dt_n = dt_{10} = \sqrt{\left[1-\frac{2M}{10M}\right]}\,dt_\infty$ ⇒ $\boxed{\tilde{E} = \frac{1}{\sqrt{4/5}}[4/5] = \sqrt{\frac{4}{5}}}$

* $\frac{dr}{dt_n} = \underbrace{-}_{\text{caída}}\sqrt{\tilde{E}^2 - [\ ]} = \sqrt{\frac{4}{5} - 1 + \frac{2M}{r}} = \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}}$ ⇒ $\boxed{t_n = -\int_{r_{ini}}^{r_{fin}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}}}}$

En concreto, para $r_{ini} = 10M$; $r_{fin} = 5M$,
con el cambio de variable $r = 10Mz$ tenemos $t_n = \int_{5M}^{10M} \frac{10M\,dz}{\sqrt{\frac{2M}{10Mz} - \frac{1}{5}}} = 10\sqrt{5}M\int_{1/2}^{1}\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z} - 1}} = 28.7M$,
es decir, $\boxed{t_n = 142\text{ s}}$.

Para calcular t_∞ hacemos: $\frac{dr}{dt_\infty} = \frac{dr/dt_n}{dt_\infty/dt_n} = \frac{-\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{4}{5}}/[\ ]}$ ⇒ $\boxed{t_\infty = \sqrt{\frac{4}{5}}\int_{r_{fin}}^{r_{ini}}\frac{dr}{\left[1-\frac{2M}{r}\right]\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}}}}$

** $\frac{dt_\infty}{dt_n} = \frac{\tilde{E}}{\left[1-\frac{2M}{r}\right]} = \frac{\overbrace{\sqrt{\frac{4}{5}}}^{\text{constante}}}{\underbrace{\left[1-\frac{2M}{r}\right]}_{\text{variable}}}$

Para $r_{ini} = 10M$; $r_{fin} = 5M$, tenemos $\boxed{t_\infty = 169\text{ s}}$

f) Redshift gravitatorio entre observadores estacionarios:

$$\boxed{t_{10} = \sqrt{\left[1-\frac{2M}{r_{10}}\right]}\,t_\infty = \sqrt{\frac{4}{5}}\,t_\infty = \frac{4}{5}\int_{5M}^{10M}\frac{dr}{[\ ]\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{1}{5}}} = 151\text{ s}}$$

$$\boxed{t_5 = \sqrt{1-\frac{2M}{5M}}\,t_\infty = \sqrt{\frac{3}{5}}\,t_\infty = 131\text{ s}}$$

g) Órbita circular (10M): $dr = 0$ ⇒ $-[\ ]\left(\frac{dt_\infty}{dt_c}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt_c}\right)^2 = -1$

⇒ $\left(\frac{dt_\infty}{dt_c}\right)^2\left\{r^2\underbrace{\Omega_\infty^2}_{\frac{d\varphi}{dt_\infty}} - [\ ]\right\} = -1$

$r^2\frac{M}{r^3} - 1 + \frac{2M}{r} = \frac{3M - r}{r}$ ⇒ $\left(\frac{dt_\infty}{dt_c}\right)^2 = \frac{r}{r-3M} \overset{[10]}{=} \frac{10}{7}$

⇒ $\boxed{dt_{10c} = \sqrt{\frac{7}{10}}\,dt_\infty = 141\text{ s}}$

$\boxed{dt_{5c} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,dt_\infty = 107\text{ s}}$

Campus Universitario de Espinardo • Apdo. Correos 4.021
Telf.: 968 36 73 75 • Fax: 968 36 41 48
30071 Murcia

RESUMEN: $t_{5c} < t_5 < t_{10c} \lesssim t_n < t_{10} < t_\infty$
como habíamos estimado → t

UNIVERSIDAD DE MURCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Facultad de Química

SOLUCIONES FÍSICA DEL COSMOS
— julio 2015, continuación —

(5) a) comóviles $\Rightarrow \chi, \theta, \varphi$ constantes $\Rightarrow \frac{d\chi}{d\tau} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{A = a^2 \frac{d\chi}{d\tau} = 0 \text{ se cumple } 1^{a} \text{ geod.}}$

se cumplen la 3^{a} y 4^{a} ecs. geodésicas

$$-d\tau^2 \equiv ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left\{ \cancel{d\chi^2} + F(\chi)\, \cancel{(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\varphi^2)} \right\}$$

$\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow$ se cumple la 2^{a} ec. geodésica

b) distancia (propia radial) entre dos obs. comóviles: $D(t) = a(t) \cdot \chi$

velocidad (" ") de un cuerpo: $V = \frac{dD}{dt} = \dot{a}\chi + a\dot{\chi} =$

$$= \underbrace{H(t) \cdot D(t)}_{\substack{\text{expansión cósmica} \\ \text{(flujo de Hubble)} \\ \text{velocidad relativa} \\ \text{de obs. comóviles} \\ \text{(en reposo relativo)}}} + \underbrace{a \cdot \dot{\chi}}_{\substack{\text{desviación del movto.} \\ \text{del cuerpo respecto de} \\ \text{la expansión cósmica} \\ \equiv v_{pec} \text{ (velocidad peculiar)}}}, \text{ ya que } H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Con el paso del tiempo $(a \to \infty)$: $v_{pec} = a(t) \cdot \frac{d\chi}{dt} = a \cdot \frac{d\chi}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} =$

$$= a \cdot \frac{A}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + A^2/a^2}} \xrightarrow[a \to \infty]{} 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Por tanto $V \xrightarrow[a \to \infty]{} HD$, que equivale al reposo relativo que existe entre observadores comóviles.

Campus Universitario de Espinardo • Apdo. Correos 4.021
Telf.: 968 36 73 75 • Fax: 968 36 41 48
30071 Murcia