SOLUCIONES - FÍSICA DEL COSMOS - enero 2015

(1) luz $ds^2=0$
radial $d\theta = d\phi = 0$ $\Big\}$ $ds^2 = \underbrace{(-[\ ])}_{=g_{tt}} dt^2 + \underbrace{\frac{dr^2}{[\ ]}}_{=g_{rr}} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{[\ ]} \Rightarrow \left|\frac{dt}{dr}\right| = \frac{1}{|[\ ]|}$

$[\ ] = [1 - \frac{2M}{r}]$

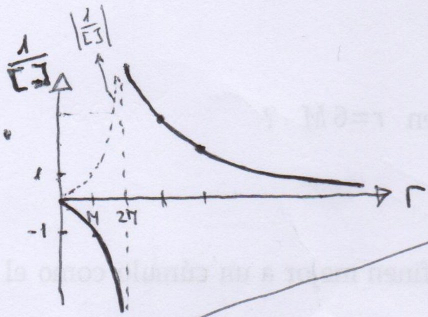
pendiente diagrama E-T

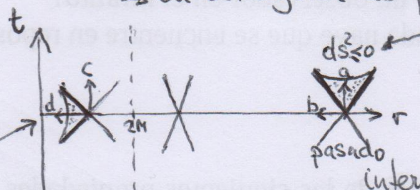
• "Conos" de luz representados en espacio bidimensional (t, r) por dos rectas, una de pendiente $\frac{1}{|1-\frac{2M}{r}|}$ y la otra con pendiente opuesta. Del semiplano de cada habrá que descartar las zonas $ds^2>0$ (space-like) y quedarse con la zona $ds^2 \leq 0$ de futuro, en cuyos bordes "habitan" o se mueven los fotones de luz radial.

• Signos de g_{tt}, g_{rr}:

	$r<2M$	$r=2M$	$r>2M$
g_{tt}	>0	0	<0
g_{rr}	<0	∞	>0

↳ en esta zona los papeles de r y t se invierten





intervalo a) $\left.\begin{matrix} dt>0 \\ dr=0 \end{matrix}\right\}$ $ds^2 = g_{tt}\,dt^2 < 0$ porque $g_{tt}<0$ $\Rightarrow$ TIME-LIKE

intervalo b) $\left.\begin{matrix} dt=0 \\ dr<0 \end{matrix}\right\}$ $ds^2 = g_{rr}\,dr^2 > 0$ porque $g_{rr}>0$

lo descartamos por SPACE-LIKE

intervalo c) $\left.\begin{matrix} dt>0 \\ dr=0 \end{matrix}\right\}$ $ds^2 = g_{tt}\,dt^2 > 0$ porque $g_{tt}>0$

SPACE-LIKE

intervalo d) $\left.\begin{matrix} dt=0 \\ dr<0 \end{matrix}\right\}$ $ds^2 = g_{rr}\,dt^2 < 0$ porque $g_{rr}<0$

TIME-LIKE

Las zonas en las que están incluidos los intervalos (a) y (d) son las de futuro, c.q.d.

(3) Cúmulo abierto (irregular), formado por estrellas jóvenes en el disco galáctico.

(4) El plano de la órbita lunar está inclinado 5° con respecto al de la eclíptica. La intersección de ambos (línea de nodos) debe estar en la dirección Tierra-Sol para que pueda haber eclipses, lo que sólo sucede cada ~173 días.

(5) En el tiempo que tarda un punto de la superficie solar en rotar 360° respecto de las estrellas fijas (rotación sideral), la Tierra se habrá adelantado en su órbita (mismo sentido), por lo que el Sol debe girar un tiempo adicional para alcanzarla (que el punto de referencia se vuelva a ver desde la Tierra en la misma posición). ⇒ rotación sinódica > rotación sideral

$R_{SIN} > R_*$

$\frac{1}{R_*} = \frac{1}{R_{SIN}} + \frac{1}{T_{orb}}$ ← $\theta_* = \theta_{SIN} + \theta_{orb}$

con $R_{SIN} = 27.3\,d$

$T_{ORB} = 365.25\,d$

⇒ $\boxed{R_* = 25.4 \text{ días}}$

soluciones – Física del Cosmos – enero 2015 (continuación)

(2) t_∞ infinito

τ nave orbitante

τ_0 nave reposo

órbita circular $dr=0$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt_\infty}\frac{dt_\infty}{d\tau}$$

$\equiv \Omega_n \qquad \equiv \Omega_\infty = \sqrt{\frac{M}{r^3}}$

$M_\odot = 2\times10^{30}\,kg \times \frac{G}{c^3}$ (segundos)

a) $-[\;]\left(\frac{dt_\infty}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{dt_\infty}{d\tau}\right)^2 \underbrace{\left(r^2\Omega_\infty^2 - [\;]\right)}_{\frac{3M}{r}-1} = -1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt_\infty}{d\tau} = \sqrt{1-\frac{3M}{r}} = \sqrt{2}} \Rightarrow \Omega_n = \sqrt{\frac{M}{r^3}}\cdot\sqrt{2}$$

$$P_n = \frac{2\pi}{\Omega_n} = 65.3M = 326 M_\odot = 1.6\times10^{-3}\,s$$

b) $P_\infty = \sqrt{2}\,P_n = 2.3\times10^{-3}\,s = 92.3M = 462 M_\odot$

c) nave en reposo respecto de obs. en infinito (grav. redshift)

$$d\tau_0 = \sqrt{[\;]}\,dt_\infty = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,dt_\infty \Rightarrow P_0 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,P_\infty = 1.9\times10^{-3}\,s = 75.4M = 377 M_\odot$$

$$\boxed{\begin{array}{c} P_0 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,P_\infty = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{2}\,P_n \\ \text{relación entre los tres} \end{array}}$$

(6) $a = \text{constante} \equiv a_{st}$ $\Rightarrow$ $\dot a_{st} = 0 = \ddot a_{st}$

dust $p=0$

$$\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho_{st} + \frac{3k}{a_{st}^2}, \qquad \Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_{st} \quad (*) \qquad a_{st}^2 = \frac{kc^2}{\pi G\rho_{st}},$$

que sólo puede ser cierto si $k>0 \Rightarrow$ universo cerrado

b) Perturbación resultante en la densidad de materia:

$\rho\cdot a^3 = \text{constante} \Rightarrow [\rho_{st}+\rho_1(t)][a_{st}+a_1(t)]^3 = \text{constante} = \rho a^3$

Guardando sólo términos lineales en a_1 nos queda $\rho_1 = -3\rho_{st}\frac{a_1}{a_{st}}$

2ª Fridmann: $\frac{\ddot a_1}{a_{st}} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho_{st} - 3\rho_{st}\frac{a_1}{a_{st}}\right] + \frac{c^2\Lambda}{3} \overset{*}{=} 4\pi G\rho_{st}\frac{a_1}{a_{st}} \Rightarrow \boxed{\ddot a_1 = 4\pi G\rho_{st}\,a_1 = c^2\Lambda\,a_1}$

Solución: $a_1(t) \sim e^{\pm\sqrt{\Lambda}t}$, que es inestable con el tiempo (crece o decrece)

(7) a) Tercera ley de Kepler: $M(M_\odot) = \frac{a(UA)^3}{T(años)^2} \simeq 4\times10^6\,M_{sol}$

$a = 0.12'' \cdot 46\frac{ld}{''} = 5.5\,ld = \frac{5.5}{365}\,ly = 948\,UA$

$T = 15.2\,yr$

semimajor axis

at the distance of Milky Way Center, 1'' corresponds to 46 light-days

period

b) $\Delta M \simeq 14$ mag (gráfica) $\Rightarrow \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'} = 10^{\frac{14}{2.5}} = 4\times10^5$ $\sim 10^6$

Como $\mathcal{L} \propto R^2$, $T = $ cte $\Rightarrow \boxed{\frac{R}{R'} = \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'}\right)^{1/2} = 6.3\times10^2}$ ~ 1000 veces para

c) $M(A3V) = 1.5$ (gráfica), $m=12$ $\Rightarrow$ $5\log\left(\frac{d}{10pc}\right) = m - M = 10.5 \Rightarrow \boxed{d = 1260\,pc}$