
Agujeros negros

10

Origen de BH estelares

- Son resultados naturales de la evolución estelar. La vida de una estrella (secuencia principal) es un equilibrio entre la atracción gravitatoria y radiación termonuclear. Al agotarse un combustible, la estrella pierde este equilibrio y puede recuperarlo contrayéndose para tratar de “quemar” el siguiente en un proceso que no puede llegar más allá del núcleo de Fe, que es el de mayor energía de enlace por nucleón. Quedan dos posibilidades:
 - Estrella en equilibrio gracias a una fuente de presión no térmica (presión de degeneración electrónica en WD hasta límite de Chandrasekhar $\sim 1.4 M_{\text{sol}}$, neutrónica en NS).
 - Colapso gravitatorio hacia un BH.
 - Existe una cantidad máxima de materia no rotante cuyo colapso gravitatorio pueda frenarse mediante presión de degeneración y fuerzas nucleares. Las estrellas con masa superior a dicho límite mueren como BH.
 - Otros tipos de agujeros negros: primordiales (PBH) y supermasivos (SMBH).
-

Singularidades y zonas especiales

- Superficies de redshift infinito: $d\tau = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$
 $r = R_s$ lo es porque observador en $r \rightarrow \infty$ medirá un tiempo $dt = \infty$ entre dos máximos de señal luminosa: $\lambda = \infty$
- Interior ($0 < r < R_s$): $g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ cambia de signo y pasa a ser espacial
 $g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ cambia de signo y pasa a ser temporal
- Singularidad ($r = 0$): la densidad, las fuerzas de marea, etc. se hacen infinitas. Se llega a ella en un instante dado ($r=0$) para todo el espacio (t).
- Horizonte de sucesos: desde el interior no se puede enviar información al exterior. La velocidad de los rayos de luz radiales tiende a cero al acercarse al horizonte. QQ Calcular apertura del cono futuro en infinito, $1.5 R_s$, y $1R_s$ y dibujar la serie de conos.

$$(ds^2=0; d\theta=d\phi=0) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Coordenadas Eddington-Finkelstein

- A medida que progresa el colapso gravitacional hay más zona exterior descrita por la métrica de Schwarzschild (en el interior de la estrella no conocemos aún la geometría del E-T). Llega un momento en que debemos estudiar la presunta singularidad en $r = 2M$ que, como vamos a ver, no es una singularidad del E-T sino del propio sistema de coordenadas.
- Una manera de verlo es usar otro sistema de coordenadas (¡no una nueva geometría!). Cambiemos (t, r, θ, ϕ) por (v, r, θ, ϕ) : $t = v - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$
- Tanto si empezamos por $r < 2M$ como por $r > 2M$, llegamos a que desaparece la singularidad y existe continuidad entre ambas regiones en las coordenadas E-F.

Métrica no diagonal:
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- A grandes r , el E-T es plano con $t = v - r$. Sigue habiendo singularidad en $r = 0$

- Rayos de luz radiales ($d\theta = d\phi = 0$):
$$- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2 dv dr = 0$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv + 2 dr = 0 \Rightarrow v - 2 \left(r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) = cte$$

salientes $r > 2M$
entrantes $r < 2M$

$r = 2M$ Estacionarios (3-superficie de separación nula)

Diagrama Eddington-Finkelstein

- Superficie $r = 2M$
 - Superficie 3D de separación nula
 - De ida sin vuelta, estacionaria
- Horizonte de sucesos. Una 2-superficie de v cte es una esfera cuyo área ($16\pi M^2$) no cambia con v excepto si cae materia en el BH (aumenta).

$$d\Sigma^2 = (2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$
- Dentro de $r = 2M$ las superficies de r constante son espaciales ($ds^2 > 0$) porque $g_{vv} > 0$ para $r < 2M$. Ahora r juega el papel de tiempo. Hay más de una manera de dividir el ET en espacio (familia de superficies espaciales) y tiempo. Ejemplo en ET plano: $t = \text{cte}$. Superficies espaciales tienen vectores normales temporales ($ds^2 > 0$). Ver diagrama de conos de luz.
- $r = 0$ no es un lugar en el espacio sino un momento en el tiempo.

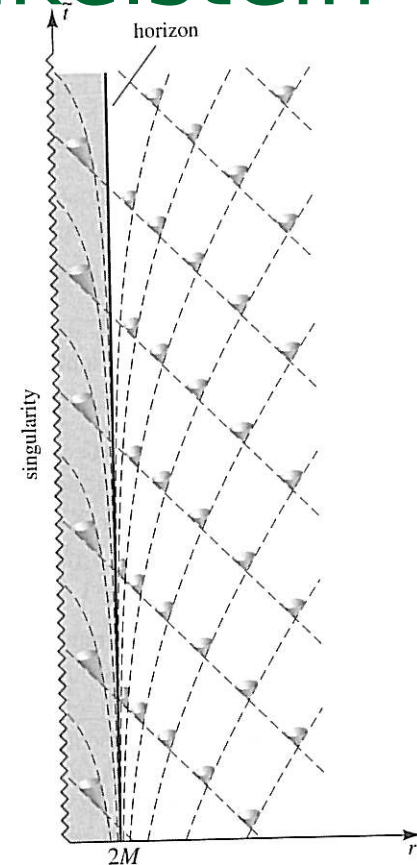


FIGURE 12.2 Radial light rays of the Schwarzschild geometry. Typical radial light rays of the Schwarzschild geometry are plotted in Eddington-Finkelstein coordinates ($\tilde{t} \equiv v - r, r$). Two radial light rays run through each point in the diagram. There are the ingoing light rays moving along the curves $v = \text{const.}$ or, equivalently, along the curves $\tilde{t} = -r + \text{const.}$ to eventually reach the singularity at $r = 0$. The other radial light ray through each point is given by (12.6). These propagate outward to infinity if they are in the region $r > 2M$ but collapse inward to the singularity if they are in the region $r < 2M$. Light thus cannot escape the region $r < 2M$. Neither can particles whose timelike world lines must lie *within* the light cone at every point they traverse. The heavy vertical line at $r = 2M$ is the horizon of the Schwarzschild black hole, which divides the region (unshaded) from which a light ray can escape to infinity from each point, from the region where none can (lightly shaded). To see a representation of these features in one more spatial dimension, turn to Figure 12.4.

Colapso según observadores

- Las partículas con movimiento radial en la superficie de la estrella colapsante siguen ldm temporales dentro del cono de luz en cada punto del E-T.
- Despreciamos presión de la materia y suponemos colapso desde reposo en el infinito. Desconocemos geometría en el interior pero debe conectar con la de Schwarzschild en la superficie.
- La superficie de la estrella puede atravesar $r = 2M$ e incluso llegar a $r = 0$.
- Observador en la superficie enviando destellos cada $\Delta\tau$ (trazos). Afuera, geom. Schwarzschild. Los emitidos después de atravesar $r=2M$ caen a $r=0$ (cesa la comunicación). Si colapso esférico, toda partícula de la sup. debe seguir alguna ldm temporal radial y todas llevan a $r=0$ en un tiempo propio finito.
- Observador en el exterior: no ve a la estrella cruzar horizonte. Redshift creciente y luminosidad decreciente hasta $z=\infty$ y $E=\hbar\omega=0$. Oscurecimiento típico en $\sim 10^{-5}$ s. Queda una geometría Schwarzschild independiente de t definida por M y no hay más información de la estrella y su colapso.

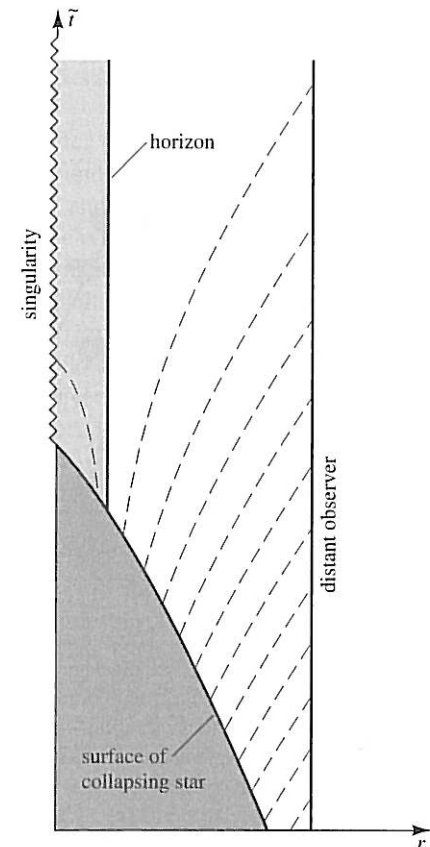


FIGURE 12.3 The story of two observers in the geometry of a collapsing spherical star. One observer stays at a fixed Schwarzschild radius r_R outside the star. The other follows its surface to smaller and smaller radii, sending out light signals at equal proper time intervals according to a clock falling with the surface. These light signals propagate out to the distant observer along the dotted curves shown. Only light rays emitted before the radius $r = 2M$ is crossed reach the distant observer. The distant observer, therefore, never sees the surface of the star cross $r = 2M$. The pulses arrive separated by longer and longer intervals as measured by the distant observer's clock. The light from the falling star becomes

Formación y crecimiento de BH

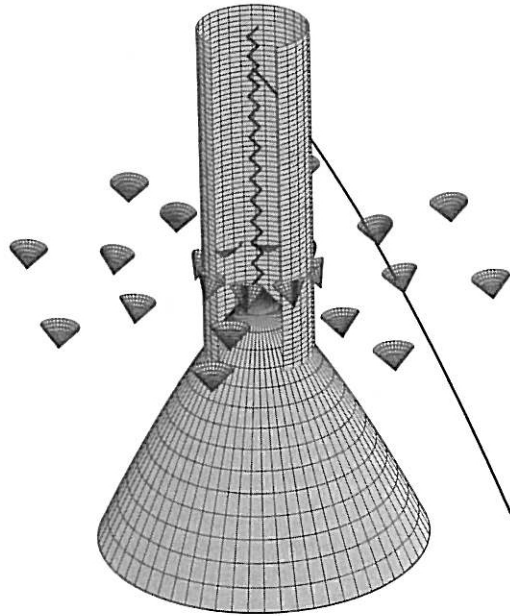


FIGURE 12.4 The formation of a black hole. Some essential features of a spherically symmetric gravitational collapse that forms a black hole are shown in this three-dimensional spacetime diagram. Eddington–Finkelstein coordinates ($\tilde{t} \equiv v - r, r, \phi$) are used as cylindrical coordinates to label points in the diagram— \tilde{t} vertically, r as radius from the axis of symmetry, and ϕ as azimuthal angle about that axis. The bottom surface is the world sheet swept out by the surface of the collapsing star as it progresses to smaller and smaller radii and eventually to a singularity at $r = 0$ [cf. (12.7)]. The vertical cylinder is the horizon at the Schwarzschild radius $r = 2M$. The horizon conceals the singularity from any distant observer but has been cut away in the illustration to reveal it. The world line of an observer falling freely from rest at infinity through the horizon and into the singularity is shown. The orientation of the future light cones at different radii on one $\tilde{t} = \text{const.}$ surface is shown. These tip more and more toward the center as they get closer to it, as illustrated with radial light rays in Figure 12.2.

La localización del horizonte en un momento depende de la geometría del ET en el futuro

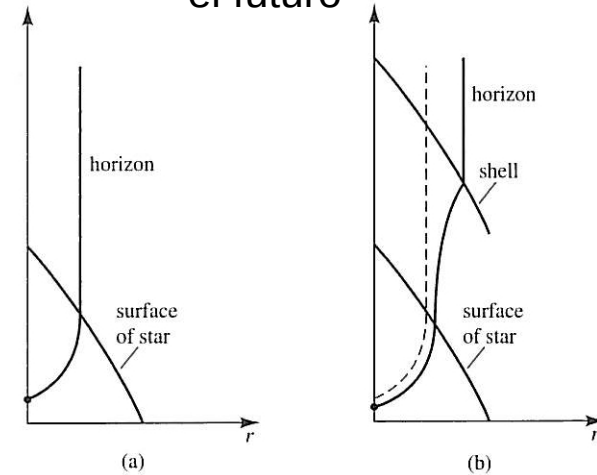


FIGURE 12.5 (a) The horizon inside a collapsing star. This figure is a schematic spacetime diagram showing how the horizon is generated by radial light rays that start at the center and make it to the surface just as the star is crossing its Schwarzschild radius, after which they remain stationary. The horizon grows in area inside the star. (b) This figure is a schematic spacetime diagram showing what happens if a shell of matter falls in after the collapse. The horizon is generated by the radial light rays, which start at the center and reach the shell as it is crossing the Schwarzschild radius corresponding to its mass plus that of the star. (The dotted line shows the location of the horizon without the shell.) The horizon is thus increasing in area between the surface of the star and the shell. (The vertical axes are not labeled in these figures because we haven't specified a set of coordinates inside the star. Outside you can take it to be \tilde{t} .)

Coordenadas Kruskal-Szekeres

- Definidas (V, U, θ, ϕ) mediante:

$$U = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right) \quad r > 2M$$

$$V = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right)$$

$$U = \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right) \quad r < 2M$$

$$V = \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right)$$

Elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dV^2 + dU^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- Líneas $r = \text{cte}$: hipérbolas en plano UV
- Líneas $t = \text{cte}$: rectas por el origen
- Rayos de luz radiales muy simples:

$$V = \pm U + \text{cte}$$

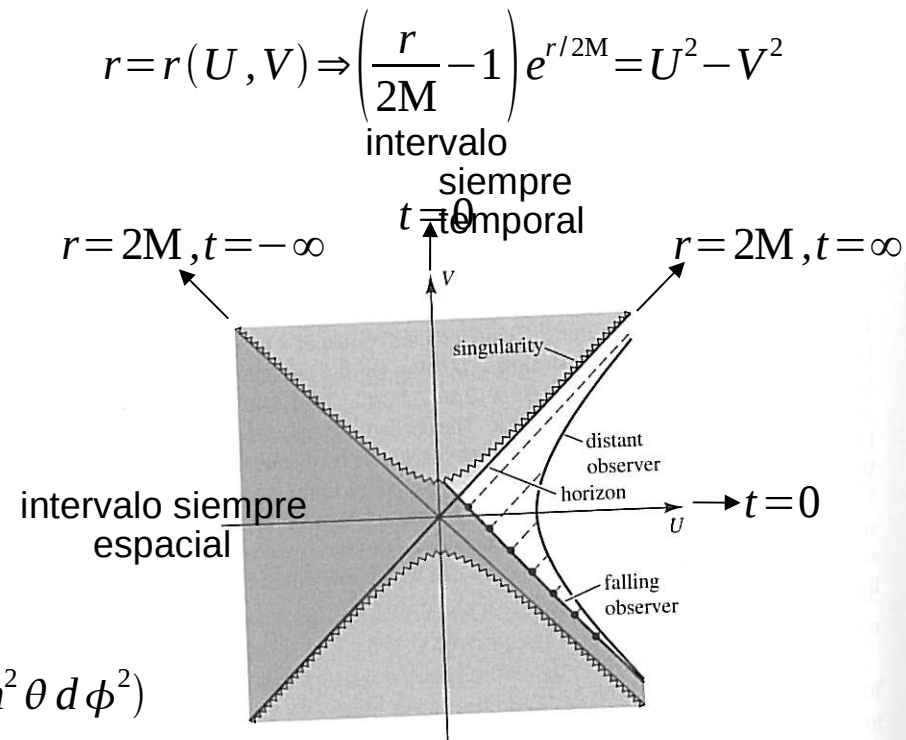


FIGURE 12.7 The world lines of two observers are illustrated in this Kruskal diagram that retells the story in Figure 12.3 but in Kruskal coordinates. The similarly shaded regions correspond in the two diagrams. One observer rides the surface of a collapsing ball of pressureless dust from large r at $t = -\infty$ down to the singularity at $r = 0$ along the world line given by (12.7a) and (12.7b). Only the unshaded and lightly shaded parts of the diagram outside the surface are relevant for the story of spherical collapse. The singularity formed at $r = 0$ is shown, as well as the horizon at $r = 2M$, which is the null curve $U = V$ on this diagram. The region inside the horizon is lightly shaded. The world line of an observer who remains stationary at large r is also illustrated. That is a hyperbola in the region $r > 2M$. The world lines of light rays emitted at equal intervals of proper time by the falling observer are shown. These are received by the distant observer at longer and longer intervals of proper time as the collapse progresses. The last light ray to reach the distant observer follows the 45° line just below the horizon. Once across the horizon, all timelike world lines lead to the singularity at $r = 0$; the star collapses to zero radius and the falling observer is destroyed.

Conjeturas sobre caso no esférico

- Rotación o explosión estelar se desvían del escenario de simetría esférica.
- Formación de singularidad: inevitable en cuanto la superficie estelar cruza $r=2M$. Es una característica de las situaciones de colapsos suficientemente prolongados y no de la simetría esférica.
- Formación de horizonte de sucesos. Conjetura de “censura cósmica”: las singularidades formadas en situaciones de colapso gravitatorio están siempre escondidas del observador por horizontes. Incluso en situaciones no esféricas.
- Aumento de área del horizonte: aunque la materia caiga de forma no esférica, su área aumentará (como la entropía en termodinámica).

Rotación

5.4.2 Agujero Negro de Kerr (rotante)

Métrica de Kerr:

$$g_{00} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta$$

$$g_{t\phi} = -2a \frac{2GM r \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad (\text{rotación})$$

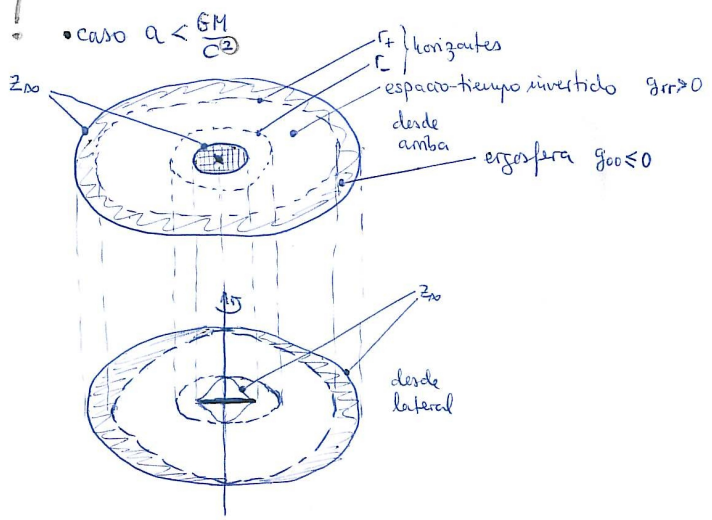
estacionaria pero no esférica
axialmente simétrica ($\phi \rightarrow \phi + \Delta\phi$)

$$\Delta \equiv r^2 - 2GM r + a^2 \quad a = \frac{J}{Mc}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$a = \frac{J}{Mc}$ MOMENTO ANGULAR POR UNIDAD DE MASA

para $a=0$, $\Delta = \rho^2 = r^2 \Rightarrow$ Schwarzschild



• HORIZONTES

Como hicimos en Schwarzschild $g_{00} dt^2 + g_{rr} dr^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{g_{00}}{g_{rr}}$

La velocidad se anulará (no hay cruce de horizonte) cuando $g_{rr} = \infty$

$\Rightarrow \Delta = r^2 - 2GM r + a^2 = 0$ ecuación 2º grado

$$r = \frac{2GM \pm \sqrt{4G^2 M^2 - 4a^2}}{2}; \quad \boxed{r_+ = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2}}$$

horizonte exterior

$a = \frac{GM}{c^2}$ y análogamente el interior

Hay un valor máximo de $J = \frac{GM^2}{c}$ por encima del cual no llegan a formarse el agujero negro (kerr con rotación máxima) $\Rightarrow \boxed{r_+ = \frac{GM}{c^2} = \frac{r_s}{2}} = r_-$

ÚLTIMA ÓRBITA ESTABLE

• ARRASTRE

Cualquier partícula que cae al AN Kerr es arrastrada en su movimiento de rotación. Aunque empiece con $J=0$, adquirirá una rotación $\frac{d\phi}{dt} = \frac{k^\phi}{k^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$

Aunque $k_\phi = 0$, $k^\phi = g^{\phi\alpha} k_\alpha = g^{\phi\phi} k_\phi + g^{\phi t} k_t$
 $k^t = g^{t\alpha} k_\alpha = g^{tt} k_t + g^{t\phi} k_\phi$

Podrías calcular la métrica inversa ($g^{rr}, g^{\theta\theta}, g^{tt}, g^{\phi\phi}, g^{t\phi}$).

En concreto: $g^{t\phi} = -a \frac{2GM r}{\rho^2 \Delta}$
 $g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta}$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{2a GM r}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \equiv \omega(r, \theta)$$

con $\omega \propto r^{-3}$ (se manifiesta sólo cerca del AN)

• ERGOSFERA

Si lanzamos un fotón tangencialmente ($r = \text{cte}$)

$$0 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$$

Si $g_{tt} = 0$ hay 2 soluciones:

- i) $\frac{d\phi}{dt} = 0$ el arrastre hace que el fotón no se mueva
- ii) $\frac{d\phi}{dt} = -2 \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$ el fotón gira solidariamente con AN

Para partículas materiales ($m > 0$) ocurre lo mismo.

Agujero de Kerr

- Ergosfera: superficie exterior al horizonte (se toca en los polos con r_+)
 Para todas las partículas giran con el BH.

$$g_{tt} = 0 \quad \Delta - a^2 \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow r^2 - 2GM r + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

$$r_0 = GM + \sqrt{(GM)^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

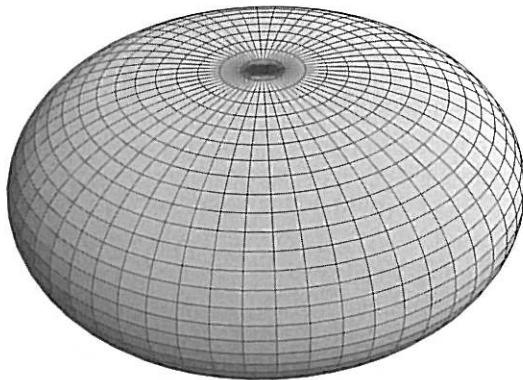


FIGURE 15.2 The horizon of a rotating black hole. The figure shows a surface in three-dimensional flat space that has the same intrinsic geometry as a $t = \text{const.}$ slice of the horizon of a Kerr black hole [cf. (15.12)]. The value of a/M is .86—approximately the maximum value for which such a slice is embeddable in flat space. Lines of constant ϕ (longitude) meeting at a pole are shown, as well as lines of constant θ (colatitude). The surface is characteristically squashed along the rotation axis in a way that is roughly analogous to the distortion of a ball of fluid when it rotates.

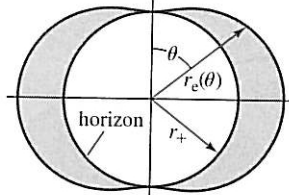


FIGURE 15.5 The ergosphere. This is a plot of the location of the horizon $r = r_+$ and the ergosphere boundary $r = r_e(\theta)$ using r and θ as polar coordinates on a flat plane for $a/M = .95$. The rotation axis of the black hole runs vertically. (This is not an embedding diagram; the horizon, for instance, is not spherical as it appears in this plot [cf. Figure 15.2].) The ergosphere is the shaded region in between these two surfaces. Inside the ergosphere no observer can remain at rest with respect to infinity.

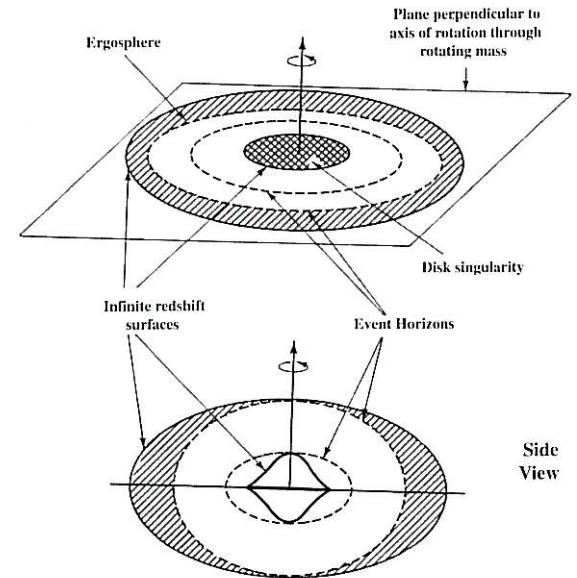


Fig 8.13. Rotating black hole. The structure of the surface is complicated, so we show two cuts. In the upper figure, we see the intersection of various surfaces with the plane perpendicular to the axis of rotation. At the center is a disk singularity. (This is just a disk and doesn't extend above or below the plane.) There are two infinite redshift surfaces and two event horizons. Between the event horizons, the roles of space and time are reversed. The region between the outer infinite redshift surface and the outer event horizon is called the ergosphere. The lower figure shows a side view.