Descripción del espacio-tiempo curvado. Geodésicas.

7 y 8

La métrica del E-T

Repasar curvatura y elemento de línea en tema 2 (Geom=Física).

- Una misma geometría puede describirse con diferentes ds (diferentes coordenadas).
- Una singularidad en las coordenadas no necesariamente implica una singularidad en la física. Puede ser una ineficacia del sistema de coordenadas (mismo punto designado por varios juegos de coords).
- Definamos la geometría de una forma general (matriz simétrica):

$$x=\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$
$$\alpha, \beta, \ldots = 0,1,2,3$$
$$i, j, \ldots = 1,2,3$$

$$\boxed{ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E-T 4D plano cartesianas

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix}$$

E-T 4D plano esféricas

SRLIs: localmente inerciales (g')

$$g'_{\alpha\beta}\left(x'_P\right)=\eta_{\alpha\beta}$$

$$\left[\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{dx'^{\gamma}}\right]_P=0$$

- PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA: las propiedades locales del espacio-tiempo curvado son las del espacio-tiempo plano de la RE (diagonalizar y renormalizar matriz).
- Al alejarnos de P la métrica va a dejar de ser Minkowski pero podemos pedir que no varíe rápidamente en el entorno (que se anulen las primeras derivadas de la métrica).
- En las cercanías de P podemos seguir hablando de conos de luz como en RE.
- Las partículas se mueven en l.d.m. temporales que pueden parametrizarse mediante 4 funciones $x^{\alpha}(\tau)$ de la distancia τ a lo largo de ellas. $V<c \Rightarrow ds^2<0 \Rightarrow d\tau^2\equiv -ds^2>0$
- Generalización de tiempo propio (distancia ldm) para ET curvado:

$$\tau_{AB}=\int\left[-g_{\alpha\beta}(x)\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}\right]^{1/2}$$

Analogía potencial - métrica

$\Phi \sim \frac{1}{r}$	$\Phi' \sim \frac{1}{r^2}$	$\Phi'' \sim \frac{1}{r^3}$
potencial escalar	campo fuerzas acel. grav.	marea
$g_{\mu\nu}$	$g_{\mu\nu,\alpha}$ $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ geodésicas (desconectable)	$g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ ecs. movimiento (auténtica marca de gravedad)

- Localmente (en P): $\tilde{g}_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta}$ (coefs. de R.E. en ausencia de grav.)

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}}(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma}(P) = 0$$ (desconectable)

la auténtica marca de gravedad está en este resto NO desconectable

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\lambda}}(P)$$, es decir, $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma,\lambda}(P)$

La marca de la gravedad

$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^\beta)$ 4 funciones de transformación

$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} d\tilde{x}^\beta$ (4 sumandos) regla de la cadena

$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \tilde{g}_{\alpha\beta}\, d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta \rightarrow$ (invariante)

$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\gamma} d\tilde{x}^\gamma \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\delta} d\tilde{x}^\delta$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{g}_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\delta}}$ *

[SCD con 6 parámetros]

10 condiciones (ecuaciones)

Transformación de la métrica

16 sumandos cada una

16 coeficientes (incógnitas)

⇨ Desarrollo en torno al punto P:

$$x^\alpha(\tilde{x}^\beta) = x^\alpha(\tilde{x}^\beta_P) + \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta}\right|_P (\tilde{x}^\beta - \tilde{x}^\beta_P) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\gamma}\right|_P (\tilde{x}^\beta - \tilde{x}^\beta_P)(\tilde{x}^\gamma - \tilde{x}^\gamma_P) +$$

punto genérico

$$+ \frac{1}{6} \left.\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\gamma \partial \tilde{x}^\delta}\right|_P (\tilde{x}^\beta - \tilde{x}^\beta_P)(\tilde{x}^\gamma - \tilde{x}^\gamma_P)(\tilde{x}^\delta - \tilde{x}^\delta_P) + \dots$$

* La transf. de la métrica implica a las primeras derivadas de las coordenadas.
De manera análoga:
La transf. de las primeras deriv. de la métrica ⇒ 2^as derivadas de coordenadas
" " " " segundas " " " " ⇒ 3^as " " "

	# condiciones	# coeficientes
$\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$	$\boxed{10}$ $\tilde{g}_{\mu\nu}$ distintos	$\boxed{16}$ $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta}$
$\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\sigma} = 0$	$10 \times 4 = \boxed{40}$	$\boxed{40}$ $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\gamma}$ 4×10
$\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\sigma \partial \tilde{x}^\lambda} = 0$	$10 \times 10 = \boxed{100}$	$\boxed{80}$ $\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\gamma \partial \tilde{x}^\delta}$ $4 \times 20 = CR^3_4 = C^3_{4+3-1}$

las 20 que no se anulan forman el tensor de curvatura

Métricas diagonales

- Casi todos los casos que veremos (BH, cosmología) son diagonales.
- En estas métricas las coordenadas son automáticamente ortogonales.
- Pasemos de elemento de línea a superficies y volúmenes.

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + g_{33}\left(dx^3\right)^2$$

longitudes propias $dl^1 = \sqrt{g_{11}}\,dx^1$, $dl^2 = \sqrt{g_{22}}\,dx^2$

por ser ortogonales $dA = dl^1\,dl^2 = \sqrt{g_{11}\,g_{22}}\,dx^1\,dx^2$

$$dV_{[3]} = \sqrt{g_{11}\,g_{22}\,g_{33}}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$$

QQ área y 3-volumen de una esfera (E-T plano en esféricas)

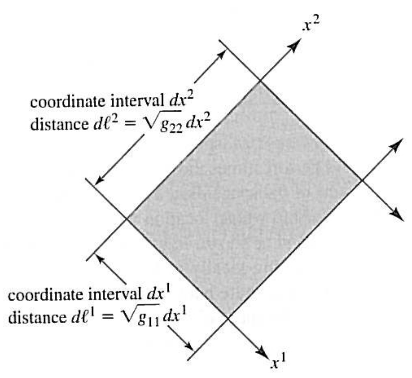

FIGURE 7.3 An element of area is defined by coordinate intervals dx^1 and dx^2. The lengths $d\ell^1$ and $d\ell^2$ of these intervals are related to dx^1 and dx^2 by the metric. If the coordinate lines are orthogonal, the area is $d\ell^1 d\ell^2$.

$$dV_{[4]} = \sqrt{-g_{00}\,g_{11}\,g_{22}\,g_{33}}\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = \sqrt{-\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}\,d^4x$$

para que no sea imaginario

Vectores en E-T curvado

- En espacio curvado no tiene sentido vector como segmento orientado. Pero la dirección todavía puede definirse <u>localmente</u> (en un *espacio tangente*) mediante vectores pequeños con los que se puede operar (+,x,...).
- Abandonamos vectores de posición por no ser locales.
- Vectores definidos en puntos diferentes están en espacios tangentes diferentes y no se pueden sumar. $P = x^\alpha$
- Bases coordenadas $\vec{e}_\alpha(x)$ y ortonormales $\vec{e}_{\hat{\alpha}}(x)$: $\vec{a}(x) = a^\alpha(x)\,\vec{e}_\alpha(x) = a^{\hat{\beta}}(x)\,\vec{e}_{\hat{\beta}}(x)$
- Producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a^\alpha\,\vec{e}_\alpha)(b^\beta\,\vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta)a^\alpha b^\beta = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}a^{\hat{\alpha}}b^{\hat{\beta}}$ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta}$

  hay que conocer el de los vectores de la base $(\vec{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\vec{e}_{\hat{\beta}}) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = (-1,1,1,1)$
- Desplazamiento y velocidad

$$\Delta x^\alpha = u^\alpha \Delta\tau$$

$$\vec{u}(\tau) = u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\gamma, \gamma\vec{v})$$

$$d\tau^2 \equiv -ds^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \frac{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}{d\tau\;d\tau} = -1}$$

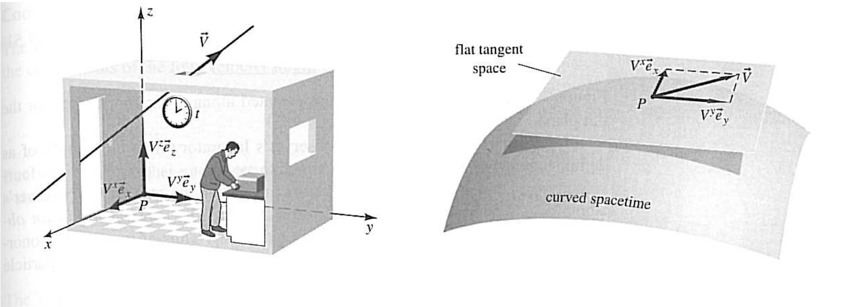

FIGURE 7.6 In physics quantities with magnitude and direction are typically defined locally and can be measured by an observer in a small laboratory located at a point in spacetime. The example of the velocity $\vec{V}$ is shown in this diagram—measured by an observer in a laboratory at left idealized as being at a point P and as a directed line segment in the corresponding tangent space at right. In that tangent space vectors can be added, subtracted, and multiplied by scalars as in flat space, as illustrated by $\vec{V} = V^x\vec{e}_x + V^y\vec{e}_y$.

Partículas en l.d.m. temporales

- Para probar la curvatura del E-T buscamos las ecuaciones de movimiento de una partícula (con masa) de prueba (responde a la curvatura producida por otros cuerpos pero la que ella provoca es despreciable).
- Pasamos de partícula libre de Newton (ninguna fuerza) a hablar de partícula en caída libre (ninguna influencia aparte de la curvatura=gravedad).
- **Principio variacional del movimiento**: la l.d.m. de una partícula de prueba en caída libre entre dos sucesos separados por intervalo temporal hace extremo el tiempo propio entre ellos. Ahora la métrica es $g_{\alpha\beta}$ en vez de $\eta_{\alpha\beta}$.

QQ Verificarlo primero para el E-T 4D plano obteniendo las cuatro ecuaciones de movimiento de una partícula libre.

- Antes conocíamos las ecuaciones del movimiento antes de aplicar el principio variacional. Ahora, para <u>E-T curvado</u>, las deducimos a partir de él y las llamaremos **ecuaciones geodésicas**. Una geodésica será una l.d.m. que hace extremo el tiempo propio.
- QQ Deduce las ecs. geodésicas del espacio plano en polares: $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2$

Ídem para la geometría de agujero de gusano:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \left(b^2 + r^2\right)\left(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

Ecuaciones geodésicas

- Se encuentran haciendo extremo el tiempo propio a lo largo de una l.d.m. temporal entre A y B. Para parametrizar la l.d.m. puede usarse cualquier parámetro σ, por ejemplo tal que valga cero en A y uno en B:

$$\tau_{AB}=\int d\tau=\int\left[-g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta\right]^{1/2}=\int d\sigma\left[-g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right]^{1/2}=\int d\sigma\left[-g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right]^{1/2}$$

- Imponer la condición de extremo es imponer que se satisfagan las ecuaciones de Lagrange para el lagrangiano $L\left(\dot{x}^\alpha,x^\alpha\right)=\left[-g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right]^{1/2}$:

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)+\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}=0$$

- Y, a la vista de los ejemplos anteriores, propondremos la siguiente forma general: $\boxed{\ddot{x}^\alpha=-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma}$ (donde $\Gamma_{\beta\gamma}$ son los llamados símbolos de Christoffel)

- ... que se pueden resolver numéricamente y, en los casos más sencillos, analíticamente. También se pueden poner en función de las componentes de la 4-velocidad (tangentes a los desplazamientos en la base coordenada):

$$\frac{du^\alpha}{d\tau}=-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,u^\beta u^\gamma$$

Símb. Christoffel y vec. Killing

- Los **símbolos de Christoffel**, de subíndices simétricos, están definidos como (QQ demo en web): $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}=\frac{g^{\alpha\nu}}{2}\left[g_{\nu\gamma,\beta}+g_{\beta\nu,\gamma}-g_{\beta\gamma,\nu}\right]$ con $g^{\alpha\nu}=\frac{1}{g_{\alpha\nu}}$ si diag.

  NOTA: De forma general (no diagonal): $g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left[g_{\nu\gamma,\beta}+g_{\beta\nu,\gamma}-g_{\beta\gamma,\nu}\right]$
- Las leyes de conservación y las correspondientes constantes del movimiento reducen el orden y número de las ecuaciones. Una constante que siempre se da es la normalización de la 4-velocidad, ya vista: $\vec{u}\cdot\vec{u}=-1$
- Otras constantes del movimiento resultan de simetrías del E-T. En el caso newtoniano E=cte, p=cte y L_ang=cte si se dan, respectivamente, simetrías frente a desplazamientos en el tiempo, el espacio y rotaciones. En RG, si la métrica es independiente de una de las coordenadas (p.ej. $x^1\rightarrow x^1+cte$) tendremos una cantidad conservada a lo largo de una geodésica:

$$\frac{\partial L}{\partial x^1}=0 \Rightarrow \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}=-g_{1\beta}\frac{1}{L}\frac{dx^\beta}{d\sigma}=-g_{1\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}=-g_{1\beta}\xi^\alpha u^\beta=-\boxed{\vec{\xi}\cdot\vec{u}=\ cte}$$

  $\xi^\alpha=(0,1,0,0)$ sería el **vector de Killing** que representa esta simetría
- QQ vectores de Killing de las métricas: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$

  $ds^2=dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\,sen^2\,\theta d\varphi^2$