

RELATIVIDAD GENERAL

APLICACIONES DE LA RG

- GPS, ^{calculado} órbitas, navegación (ISS)
- NS, BH, QSO (objetos compactos)
- Cosmología
- Ondas gravitatorias

Tests clásicos:

- x redshift gravitatorio
- x desviación de luz por Sol
- x precisión del perihelio

⊙ eclipse 1919
Eddington

Efectos relativistas: ¿cuándo serán importantes? $\frac{GM}{c^2 r} \sim 1$

- universo temprano (gravedad cuántica)
- " actual: Tierra: 10^{-9} (necesario en GPS)
- Sol: 10^{-6} (apreciable en Mercurio)

$$M_{NS} \approx M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g};$$

$$R_{NS} \approx 10 \text{ km}; R_{\odot} \approx 100 R_T$$

$$NS: 10^{-1}$$

$$BH \quad M_{BH} > M_{\odot}, R_{BH} = R_S = 2M_{BH}$$

GRAVEDAD ES GEOMETRÍA de la unión 4D de espacio y tiempo, curvada por la materia
NO ES fuerza instantánea (Newton)

Propiedad de la gravedad: cuerpos siguen tray. única en diag. E-T

mismas conds. iniciales \Rightarrow misma tray. (MÁX. ACCIÓN) EXTREMA

¿Por qué usar diferentes métricas? (formas de medir "distancias")

Porque existen muchas geometrías posibles

Pueden a medir distancias o ángulos en

o a medir intervalos en Minkowski:

- plano euclídeo
- sup. 2D curva (esfera)
- sup. 3D curva (3-esfera)
- ...

¿Cómo se describe una geometría?

Mediante el ELEMENTO DE LÍNEA ds

Fórmula de medir "distancias" (entre dos sucesos, no entre pts espaciales)

Porque la geom. se reduce a distancias, y estas a elementos línea (ds)

• integrales de camino

• mínima distancia \rightarrow geodésica

• ángulos como cocientes de distancias ($\frac{\text{arco}}{\text{radio}}$)

• superf., volúmenes como integrales dobles, triples

Además, los ds en relatividad son los INVARIANTES naturales

frente a la elección de juegos de coords y sistemas de referencia (SR)

Ejemplo ESPEJOS PARALELOS (encontrar invar. en métrica Minkowski)

$$\Rightarrow ds^2 \equiv -dt^2 + \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{dS^2} \equiv -d\tau^2$$

↓
hazé que ds^2 no siempre sea ≥ 0

medido el tiempo en metros (de luz)

SISTEMAS DE REFERENCIA sinónimo de "observador"

Ejes + Reloj asociados a un observador

Imaginar malla 3D muy tupida de relojes sincronizados

$x \equiv$ posición del reloj más cercano

$t \equiv$ tiempo medido por éste (corregido de sincrono)

mediante rayo de luz que los va entendiendo según pasa

SISTEMAS REF. INERCIALES (SRI, "free-float")

Es un conjunto (traslación o rotación fijas, m.r.u.) \neq OPERACIONES PERMITIDAS
NO aceleración ni rotación NO PERMITIDAS

En ellos, partícula libre en reposo permanece en reposo
" " en m.r.u. " " m.r.u.

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Experimentos idénticos en SRI's diferentes dan resultados idénticos

No puedes distinguir en cuál estás, no existe un SRI privilegiado (éter)

Porque la propia geometría es INVARIANTE frente a las operaciones \neq

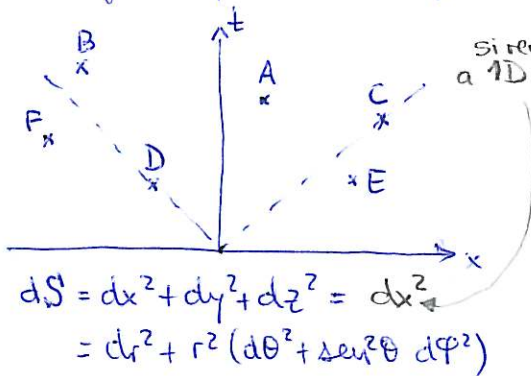
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

QA \rightarrow

\Rightarrow GRAVEDAD = GEOMETRÍA

TIPOS DE INTERVALOS ENTRE SUCESOS

Sigamos, de momento, en Minkowski = Euclídeo \oplus Tiempo E-T plano



OA • Causales materiales, time-like

$ds^2 < 0$ es decir $dt^2 > ds^2$

pendiente $|\frac{dt}{dx}| > 1 \Rightarrow$ velocidad $|\frac{dx}{dt}| < 1$

$v < c \equiv 1$ para UNIDADES GEOMETRIZADAS (ver problemas)

OC • Causales lumínicos, light-like

$ds^2 = 0$ $dt^2 = ds^2$

pendiente $|\frac{dt}{dx}| = 1 \Rightarrow v = c$

OE • No causales, taquiónicos, space-like

$ds^2 > 0$

$ds^2 > dt^2$

no ha podido llegar luz de un suceso al otro

pendiente $|\frac{dt}{dx}| < 1 \Rightarrow v > c$

DISTANCIA Y TIEMPO PROPIOS

(x_1, t_1)
 (x_2, t_2)

• Para intervalos $ds^2 > 0$ vistos por varios observadores $\left. \begin{matrix} x'_1, t'_1 \\ x'_2, t'_2 \end{matrix} \right\}, \left. \begin{matrix} x''_1, t''_1 \\ x''_2, t''_2 \end{matrix} \right\}, \dots$

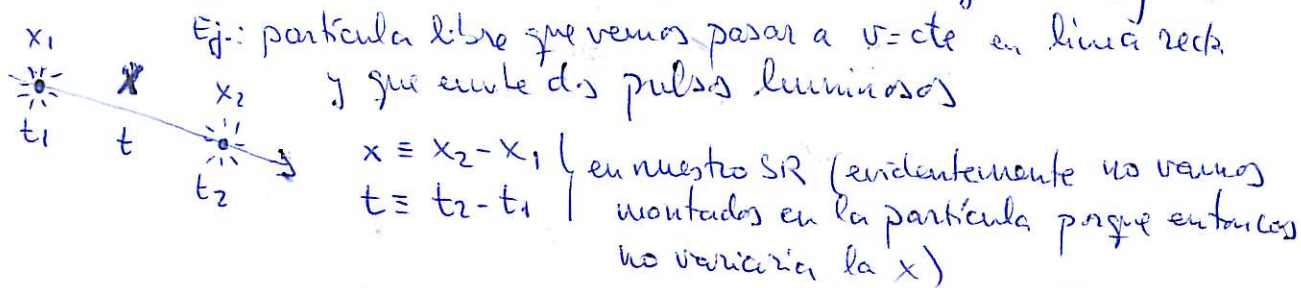
$ds^2 = dx^2 - dt^2 = dx'^2 - dt'^2 = dx''^2 - dt''^2 = \dots$

reduciendo a 1D lo espacial \rightarrow separ. espacial \rightarrow separ. temporal \rightarrow cada uno las ve distintos $\left. \begin{matrix} dx^2 \neq dx'^2 \neq dx''^2 \neq \dots \\ dt^2 \neq dt'^2 \neq dt''^2 \neq \dots \end{matrix} \right\}$

pero todos se ponen de acuerdo en ds^2 , la llamada **DISTANCIA PROPIA** que es la menor separación espacial de todas las posibles $dx^2, dx'^2, dx''^2, \dots$ El intervalo ds^2 se convierte en separación espacial pura (REGIA) en aquel sistema en que los dos sucesos ocurren al mismo tiempo. (regla ideal para medir longitudes).

• Para intervalos $ds^2 < 0 \Rightarrow dt^2 - dx^2 = -ds^2 = dt'^2 - dx'^2 = d\tau^2 - 0^2$

Todos se ponen de acuerdo en $-ds^2 \equiv d\tau^2$, que llamamos **TIEMPO PROPIO** que es el menor posible de entre $dt^2, dt'^2, dt''^2, \dots$ $-ds^2$ se convierte en separación temporal pura (RELOJ) en aquel sistema en que los dos sucesos ocurren en el mismo lugar (observador ideal para hacer de reloj). Este observador especial es el que va montado en la partícula del siguiente ejemplo.



Aún habrá otros SRTs (', '', ''', ...) $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = t''^2 - x''^2 = \tau^2 - 0^2$
 nosotros ... otros ... partícula

El tiempo propio es el tiempo medido por un reloj que se mueve en la "línea de mundo" (worldline in space-time diagram).

\Rightarrow EL TIEMPO PROPIO es un EXTREMO

Ahora podemos calcular:

$$\Delta_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \vec{v}^2} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} d\tau < dt \\ \text{DILATACIÓN} \\ \text{TEMPORAL} \\ dt = \gamma \cdot d\tau \\ \text{con } \gamma > 1 \end{matrix}}$$

Reparar $\boxed{\begin{matrix} \text{CONTRACCIÓN} \\ \text{DE LONGITUDES} \\ dl = \frac{d\sigma}{\gamma} \\ \text{(Lorenz)} \end{matrix}}$

PRINCIPIO DE ACCIÓN EXTREMA (Física Teórica)

Una partícula libre se mueve del suceso (x_A, t_A) al suceso (x_B, t_B) tal que:

$$S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt \cdot \mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t)) \text{ sea EXTREMO.}$$

funcional trayectoria

• Caso R.E.) $\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \vec{v}^2}$ Para intervalos dt tan cortos que \vec{v} sea cte:
 $d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{v}^2} = \frac{dt}{\gamma}$

De todos los caminos entre dos sucesos, part. libre tomará el que hace extremo $d\tau$.

• Caso R.G. con gravedad leve) Sea $ds^2 = -[(1+2\phi)] dt^2 + \frac{1}{(1-2\phi)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$
 $v \ll c$
 $\phi \ll 1$
 $\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[(1+2\phi)] dt^2 - (1-2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$

$$= \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{[(1+2\phi) - (1-2\phi) \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]}$$

1er orden 2º orden 3er orden

$$\approx \int_{t_A}^{t_B} dt \left[1 + \phi - \frac{v^2}{2} \right]$$

$$\left[1 + 2\phi - (v^2 - 2\phi v^2) \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{2\phi - v^2}{2} \approx 1 + \phi - \frac{v^2}{2} \equiv -\mathcal{L}$$

Hacer extremo τ_{AB} equivale a hacer extremo $\frac{v^2}{2} - \phi \equiv \mathcal{L}$ el lagrangiano

Equivale a satisfacer las Ecuaciones de Lagrange:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 ; \text{ si } \mathcal{L} = f(x) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \text{cte} \text{ CONSTANTE DEL MOVIMIENTO}$$

coordenada cíclica
si t cíclica \Rightarrow se conserva E

CONSERVACIÓN ENERGÍA Y MOMENTO LINEAL EN R.E. (recordatorio)

Ej.: vemos part. libre moviéndose hacia nuestra derecha emitiendo 3 pulsos
 Fijo x_2 y busco t_2 . Su morto, natural será tal que t haga extremo $\tau = \tau_{12} + \tau_{23}$

$$\tau_{12} = \sqrt{t^2 - x^2} ; \frac{d\tau_{12}}{dt} = \frac{2t}{2\tau_{12}}$$

$$\tau_{23} = \sqrt{(T-t)^2 - (X-x)^2} ; \frac{d\tau_{23}}{dt} = \frac{-2(T-t)}{2\tau_{23}}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau_{12}}{dt} + \frac{d\tau_{23}}{dt} = \frac{t}{\tau_{12}} - \frac{(T-t)}{\tau_{23}} = 0 ;$$

extremizo

$$\frac{t_{12}}{\tau_{12}} = \frac{t_{23}}{\tau_{23}} = \text{constante} = \frac{t_{34}}{\tau_{34}} = \dots$$

El ppio. de tiempo propio extremo (máx. acción, envej. extremo) elige conservar $\frac{t}{\tau}$ ¿y qué es?

$$\text{cte} = \frac{t}{\tau} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}} = \frac{t}{t\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma$$

Y en R.E. sabemos que $\gamma = \frac{E}{mc^2}$
 porque $\vec{P} = m\vec{u} = m\gamma(1, v_x, v_y, v_z)$ CUADRIVECTOR ENERGÍA-IMPULSO
 cuya 1ª componente es $E = m\gamma c^2$
 en reposo (visto por partícula) $\frac{dt}{d\tau} = 1$ tenemos $E = mc^2$

R.E.) $\vec{E} = \frac{E}{m} = \left(1, \frac{dt}{d\tau}\right)$ en términos de segmentos diferenciales

R.G.) tendríamos $\vec{E} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$

\hookrightarrow es el nuevo $-g_{00}$ correspondiente a $(-1) = 1$ de Minkowski

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

recordar equivalencia $M_I = M_G$

No se puede distinguir entre una aceleración unif. y un campo gravit. unif.

- x Podemos simular $-g$ con $+a$... ascensor con báscula
- " anular $-g$ con $-a$... nave

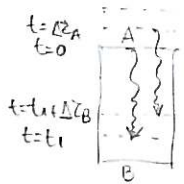
... en un determinado punto del ET, pero no en su veindad ni en grandes regiones

En regiones extensas siempre aparecen las fzs. de marea (auténtica marca de gravedad)
 → experimento observador en caída libre con 4 bolas en círculo

ENFOQUEAMIENTO GRAVITATORIO

Ondas emitidas más arriba (más lejos del cuerpo masivo) se observan más azules por el observador de más abajo. Equiv^o, las señales enviadas por la nave que se acerca al agujero negro se ven en el infinito enrojecidas.

→ experimento Pound+Rebka con efecto Mössbauer.



$z_B(t) = \frac{1}{2} g t^2$; $z_A(t) = h + z_B(t)$

Primer pulso, distancia viaje: $z_A(0) - z_B(t_1) = h - \frac{1}{2} g t_1^2 = c t_1$ distancia = veloc. · tiempo

2º " : $z_A(\Delta z_A) - z_B(t_1 + \Delta z_B) = h + \frac{1}{2} g \Delta z_A^2 - \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta z_B)^2$

$h - \frac{1}{2} g t_1^2 - g t_1 \Delta z_B = c (t_1 + \Delta z_B - \Delta z_A)$

$P-Q \Rightarrow \frac{g t_1 \Delta z_B}{c} = \Delta z_A - \Delta z_B \Rightarrow \Delta z_B (1 + \frac{g t_1}{c}) = \Delta z_A \Rightarrow \Delta z_B (1 + \frac{g h}{c^2}) = \Delta z_A$

$P \Rightarrow \frac{g}{2} t_1^2 + c t_1 - h = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2gh}}{g} = \frac{c}{g} [-1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}] \approx \frac{h}{c}$

$g h = \phi_A - \phi_B > 0 \Rightarrow \Delta z_A = \Delta z_B \left(1 + \frac{\phi_A - \phi_B}{c^2} \right)$
 $\Rightarrow v_A = v_B \cdot \left(1 - \frac{\phi_A - \phi_B}{c^2} \right)$
 $v_A < v_B$

$df_A = \frac{df_{rep}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

trazo escalaramos con $dt_A > dt_B$ enrojecimiento

- no confundir con dispersión por polvo interestelar, ni Doppler (movt rel. emisor-receptor), ni con cosmológico (expansión ET surge las galaxias se muevan de sus coordenadas)

CASO NEWTONIANO GEOMETRIZADO : GRAVEDAD LEVE Y ESTÁTICO

Problemas a substituir genu. Minkowski con :

$\Delta s^2 = - (1 + 2\phi) \Delta t^2 + (1 - 2\phi) (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$ STATIC WEAK FIELD METRIC

Observadores estacionarios $\Rightarrow \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$

Para A: $\Delta z_A^2 \approx -\Delta s^2 = (1 + 2\phi_A) \Delta t^2 \Rightarrow \Delta z_A \approx (1 + \phi_A) \Delta t$

Para B: $\Delta z_B^2 \approx (1 + 2\phi_B) \Delta t^2 \Rightarrow \Delta z_B \approx (1 + \phi_B) \Delta t$

$\Rightarrow \frac{\Delta z_A}{\Delta z_B} = (1 + \phi_A) (1 + \phi_B)^{-1} \approx (1 + \phi_A) (1 - \phi_B) \Rightarrow \Delta z_A \approx \Delta z_B \left(1 + \frac{\phi_A - \phi_B}{c^2} \right)$

$\dot{z}_{AB} = \int_A^B dt \left[1 - \frac{v^2}{2} + \phi \right]$

una nueva geometría es capaz de reproducir el resultado exper.

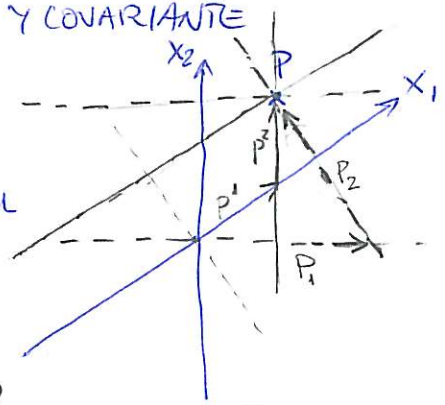
↔ ver cómo queda PPIO ACCIÓN EXTREMA en GRAVEDAD LEVE

bien pensado, pero que $\sqrt{1+2\phi} \approx 1+\phi$

RECORDATORIO FORMULACIÓN CONTRAVARIANTE Y COVARIANTE

Contravar: cada componente es un segmento paralelo al eje de la coordenada correspondiente

Covar: cada componente es un segmento perpendicular a todos los ejes que no sean el suyo.



Transf. contravar: $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'}$

$$dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} dx^{1'} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} dx^{2'} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} dx^{3'} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{4'}} dx^{4'}$$

vector contravar: $V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} V^{\nu'}$; COVAR \leftrightarrow CONTRAVAR

$$\begin{cases} V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \\ V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta^\sigma_\mu \end{array} \right.$$

Tensor T^p_q : función lineal que asocia un número real a \underline{p} vectores contravar. y a \underline{q} vectores covar.

ECUACIONES GEODÉSICAS y SIMBOLOS DE CHRISTOFFEL, VECT. KILLING

Ej: métrica sencilla (2D plana) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$; escojo un parámetro σ para describir trayectorias $(r(\sigma), \phi(\sigma))$

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = \int_1^2 \sqrt{-dr^2 - r^2 d\phi^2} = \int_0^1 d\sigma \sqrt{\frac{dr^2}{d\sigma^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\sigma^2}} \quad \text{donde } \dot{} = \frac{d}{d\sigma}$$

$\frac{d\tau}{d\sigma} = d(r, \phi, r, \phi) = -[r^2 + r^2 \dot{\phi}^2]^{1/2}$
↳ coord. cilíndrica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2\mathcal{L}} (2r\dot{\phi}^2) = -\frac{r\dot{\phi}^2}{\mathcal{L}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\frac{2r^2\dot{\phi}}{2\mathcal{L}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= -\frac{2r\dot{\phi}^2}{2\mathcal{L}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{r}{\mathcal{L}} \right) = \frac{r}{\mathcal{L}} \dot{\phi}^2 \\ \rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{r^2 \dot{\phi}}{\mathcal{L}} \right) = 0 \end{array} \right\} \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \frac{dr}{d\sigma} \right) &= r \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\phi}{d\sigma} \frac{d\phi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} \\ \Rightarrow \frac{d^2 r}{d\tau^2} &= r \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow \ddot{r} = r \dot{\phi}^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{d(r^2)}{d\tau} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} + r^2 \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} \end{aligned}$$

QQ Encuentra ecuaciones geodéticas de la métrica "agujero de gusano"

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

a la vista de los ejemplos anteriores, vemos que:

$$X^\alpha = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \frac{d u^\alpha}{d\tau}$$

con $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{g^{\alpha\delta}}{2} \left[g_{\delta\beta, \gamma} + g_{\delta\gamma, \beta} - g_{\delta\gamma, \beta} \right]$ (ver demostraciones.pdf)
Simétricos como $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
Los $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ tienen que ver con las $g_{\mu\nu, \rho}$ (primeros derivados)
o: deac con $\vec{g} = -\nabla\phi$
campo, fuerza, acel

Si MÉTRICA DIAGONAL $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g_{\alpha\beta}}$; si NO DIAGONAL: $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$

Si variable cíclica (p.ej. x^1) $\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^1} = cte = \frac{1}{2\mathcal{L}} (-2 g_{13} \dot{x}^3) = -g_{13} \frac{dx^3}{d\tau} = -\frac{\vec{u}}{u} \cdot \vec{u} = cte$

QQ $\left\{ \begin{array}{l} g_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + g_{01} \dot{x}^0 \dot{x}^1 + g_{02} \dot{x}^0 \dot{x}^2 + g_{03} \dot{x}^0 \dot{x}^3 + \\ + g_{10} \dot{x}^1 \dot{x}^0 + g_{11} (\dot{x}^1)^2 + g_{12} \dot{x}^1 \dot{x}^2 + g_{13} \dot{x}^1 \dot{x}^3 + \\ + \quad \quad \quad + g_{22} (\dot{x}^2)^2 + g_{23} \dot{x}^2 \dot{x}^3 + \\ + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + g_{33} (\dot{x}^3)^2 \end{array} \right\}$
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^1} = \frac{g_{01} \dot{x}^0 + g_{10} \dot{x}^0 + 2g_{11} \dot{x}^1 + 2g_{12} \dot{x}^2 + 2g_{13} \dot{x}^3}{2g_{10} \dot{x}^0}$
parece un prod esc.: $-g_{13} \xi^\alpha \cdot u^\beta$
con $\vec{\xi} = (0, 1, 0, 0)$
un \perp en la coord. cilíndrica x^1
también, matricialmente: $(\xi_i) (g_{\alpha\beta}) (u^\alpha)$

FC2
[coord. p1, p18]

CAMBIO EN EL CONCEPTO DE GRAVEDAD

Newton
 $m \Rightarrow \phi \Rightarrow F \text{ instant}$
 $F = -m \vec{\nabla} \phi$

Newtoniano GEOMÉTRICO
 (gravedad leve)
 $m \text{ curva E-T según}$
 $ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)(dx^2+dy^2+dz^2)$

Relatividad GENERAL
 simétrico, 10 componentes indep.
 $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$
 $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$

movto: $m \vec{a} = \vec{F}$
 ec. campo: $\nabla^2 \phi = 4\pi G \mu$

ppro acc. extrema: $\dot{\tau} = \int dt [1 - \frac{v^2}{2} + \phi]$
 $\nabla^2 \phi = 4\pi G \mu$

$\tau = \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} =$
 $= \int dt \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$
 $= \int dt \mathcal{L}$
 $-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$

$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ 10-4 coords = 6 eqs.

$\hookrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA EN TÉRMINOS GEOMÉTRICOS

(comparar con ppio. de pág. anterior)

Las propiedades locales del E-T curvado son las del E-T plano (R.E. Minkowski).
 Algebráicamente: diagonalizar y renormalizar matriz $g_{\alpha\beta}$.
 SRTI: En cada punto P del E-T podremos encontrar un SRTI $x'^{\alpha'}$ tal que:

$g'_{\alpha\beta}(x'^{\alpha'}) = \eta_{\alpha\beta}$ renormalizar significa dejar $g'_{\alpha\beta} = \pm 1$ (Minkowski)

No podremos encontrar un SR en el que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ en todo el E-T, pero SÍ el SRTI que, además, cumpla $\left[\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}} \right]_P = 0$ *equivale a anular la fza o acel. grav ($\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$)
 * el algebráico de P la métrica dejará de ser Mink. pero pedimos que no varíe rapid. en el entorno (deriv. primera nula)

No podremos encontrar un SR en el que se anulen todas las 2^{da} deriv: $\left[\frac{\partial^2 g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right]_P = 0$
 porque son las fzas de marea, marea de gravedad escalar en la medida de la curvatura.

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \sim \left[\frac{\partial^2 g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right]_P \neq 0$

GEOMETRÍA MÁS GENERAL

Una geometría más general: $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ \rightarrow relacionados con ϕ (en límite newtoniano y campo débil: $-g_{00} = 1+2\phi$)

nos lleva a un tiempo propio más general: $\tau_{AB} = \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$

a un producto escalar más general: $\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$

y a un lagrangiano y ppro de acción extrema más general:

$\tau_{AB} = \int dt \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}$
 $\equiv \mathcal{L}$

Ej: NORMALIZACIÓN de \vec{u} : $\vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \begin{cases} -1 & \text{PARTÍCULAS MASIVAS} \\ 0 & \text{FOTONES} \end{cases}$