

Gráficas en escala logarítmica

Algunas funciones $y = f(x)$ no se visualizan bien en la escala (x, y) cuando las magnitudes de x ó y son demasiado grandes o pequeñas. En tales casos se suele utilizar la *escala logarítmica* en uno (o ambos) ejes, que reescala los ejes mediante potencias de 10 equidistantes.

1. Considera las funciones

$$f(x) = 0.3 \cdot 10^x, \quad g(x) = 10^{12} \cdot 2^{-10x}, \quad h(x) = e^{3x^2}, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 5.$$

- (a) Utiliza `plot2d` para dibujar sus gráficas en la escala normal, y en una escala logarítmica¹ adecuada.
 (b) Describe el aspecto de las gráficas y justifica por qué se transforman en rectas o parábolas.
 (c) Observa las marcas del eje vertical. Determina a partir de la gráfica cuándo f corta a g , y para qué valor de x se alcanzan $h(x) = 10^6$ y $g(x) = 10^{-3}$.

2. Considera las funciones

$$f(x) = 5x^4, \quad g(x) = 4/x^2 \quad \text{para } 0.1 \leq x \leq 100.$$

- (a) Utiliza `plot2d` para dibujar sus gráficas en escala normal, y en escala log-log.
 (b) En cada caso, ¿qué valor de x da $y = 100$? ¿Dónde se cortan las funciones?
 (c) ¿Sabrías decir qué tipo de funciones dan una recta en escala log-log?

3. En las especies de árbol es frecuente que el tamaño medio B (en kgs por árbol) que alcanzan en un hábitat, decrezca con la densidad d del hábitat (nº medio de árboles por Ha). Este fenómeno se denomina *autoclareo*. Yoda observó que al representar los datos (d, B) en escala log-log se obtiene aproximadamente una recta de pendiente $-3/2$. En este caso, ¿qué relación existe entre B y d ?

Para una especie de árbol se tienen los datos

d	100	400	2500	10.000
B	3000	375	24	3

- a) Dibújalos² en escala log-log, y determina si se cumple la ley de Yoda.
 b) ¿Con qué densidad deberíamos plantar los árboles para obtener un tamaño medio de 200 kgs por árbol?
 4. Se observa que la densidad y de cierta bacteria disminuye con la concentración x de medicamento, obteniéndose experimentalmente los datos de la tabla.

x	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
y	2.72	1.71	1.11	0.62	0.36	0.11

- (a) Dibuja los datos en escala semilogarítmica y logarítmica, y determina si se ajustan mejor a una función de tipo exponencial o de tipo potencial.
 (b) Una vez decidido lo anterior, utiliza regresión lineal para encontrar el valor de la función.
 (c) ¿Qué concentración de medicamento mantendría la densidad de bacterias por debajo de 0.8?

5. Las siguientes funciones miden las proporciones de las distintas especies que aparecen al descomponer el ácido carbónico H_2CO_3 en una disolución

$$A(x) = \frac{x^2}{x^2 + k_1x + k_1k_2}, \quad B(x) = \frac{k_1x}{x^2 + k_1x + k_1k_2}, \quad C(x) = \frac{k_1k_2}{x^2 + k_1x + k_1k_2},$$

donde $k_1 = 4.4 \cdot 10^{-7}$, $k_2 = 4.7 \cdot 10^{-11}$, y $x = [H^+]$ es la concentración de iones en la disolución.

- a) Dibuja las 3 curvas en una misma gráfica, para valores de x entre 10^{-14} y 10^{-2} .
 b) Repite el apartado a) pero usando escala logarítmica en x .
 c) Lo mismo que a) pero cambiando la variable $x = 10^{-p}$, para valores de p entre³ 2 y 14.
 d) Con el cambio de variable en c), determina los valores de p donde A coincide con B , y B coincide con C (denominados *pK's del ácido*).
 e) ¿Qué proporción de cada producto hay cuando el pH es 7? ¿Entre qué pHs debería estar la disolución para que haya más de un 60% de la especie B (anión bicarbonato HCO_3^-)?

¹Marcar la casilla correspondiente en la pestaña *Gráficos 2D* de Maxima, o bien añadir la opción a mano

`plot2d(...,[logy])` o `draw2d(...,logy=true)`

²En Maxima, las escalas logarítmicas también pueden activarse al dibujar diagramas de puntos, por ejemplo

`draw2d(point_type=5,points(x,y),logx=true,logy=true)`.

³Observa que $p = -\log_{10} x = -\log_{10}[H^+]$ es el pH de la disolución.