Matemáticas. 1º Bioquímica. 9/1/2020 | 2'5 | 2'5 | 3 | 2 |

Nombre y dni ....

10

1. En una ciudad se estudia la concentración de SO_2 en el aire (en ppm), obteniéndose las siguientes mediciones en 12 estaciones durante dos años consecutivos

X_1 (año 2018)	40	21	67	99	35	57	52	72	36	48	41	53
X_2 (año 2019)	34	12	59	85	37	45	56	47	46	25	33	46

0.5 a) Dibuja los datos en un mismo diagrama de tallos y hojas.

0.5 b) Para los datos de 2018, calcula: mediana, cuartiles, intervalo típico, y datos atípicos.

0.4 c) Dibuja los box-plot de X_1 y X_2 y explica lo que ves.

0.5 d) Para la diferencia de mediciones $Z = X_1 - X_2$, dibuja un histograma con 5 intervalos, calcula la media $\bar{z}$ y la desviación típica σ_n, y determina el porcentaje de datos en $\bar{z} \pm \sigma_n$.

0.5 e) Si suponemos que $Z \sim N(\mu, \sigma)$ (con μ, σ desconocidos), da un intervalo de confianza para μ al 95%. ¿Es razonable suponer que la concentración media de SO_2 no ha variado en el último año?

Nota: 2'5 puntos.

a) ✓

X_1		X_2
	1	2
1	2	5
6 5	3	4 7 3
1 8 0	4	5 7 6 6
3 2 7	5	9 6
7	6	
2	7	
	8	5
9	9	

b) ✓ $M = \frac{48+52}{2} = 50$ $\quad Q_3 = \frac{57+67}{2} = 62$

$Q_1 = \frac{40+36}{2} = 38$

$RI = [62-38] = 24$

$I = \left[38 - \frac{3}{2}\cdot 24,\ 62 + \frac{3}{2}\cdot 24\right] = [2, 98]$

$X_i \notin I \rightarrow$ es un dato atípico, por lo que el 99 es un dato atípico

c) X_2: $M = \frac{45+46}{2} = 45'5$ $\quad Q_3 = \frac{47+56}{2} = 51'5$

$Q_1 = \frac{33+34}{2} = 33'5$

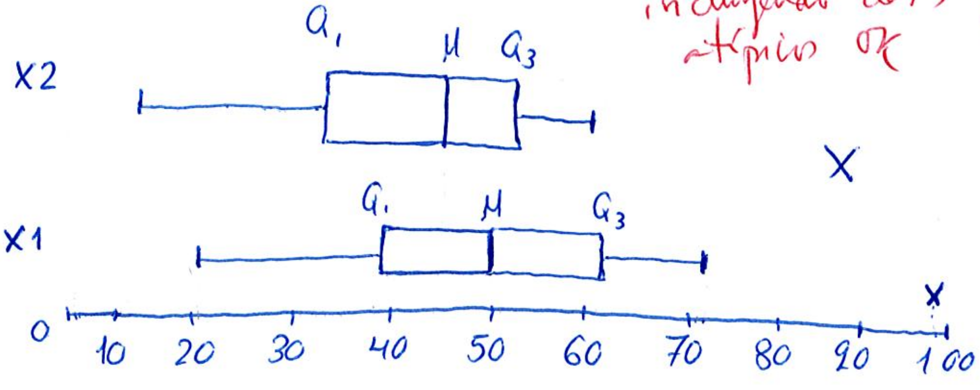
$RI = [51'5 - 33'5] = 18$

$I = \left[33'5 - \frac{3}{2}\cdot 18,\ 51'5 + \frac{3}{2}\cdot 18\right] =$

Dato atípico el 85

$I = [6'5, 78'5]$

en una sola ventana, incluyendo datos atípicos OK



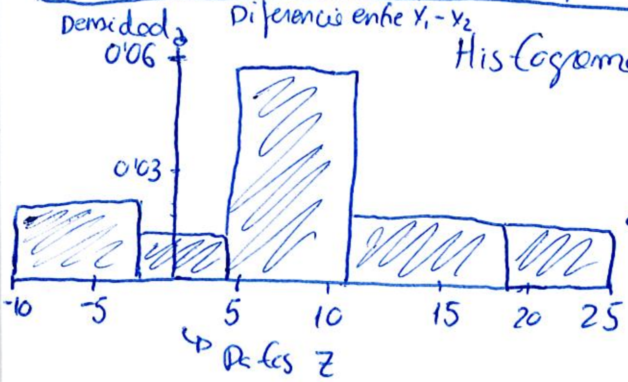
Representación de un box-plot, hecho en el formato máximo con más detalle

Respecto a lo que se observa en el box-plot, en el año 2018 los datos están muy centrados, con un ligero sesgo a la izquierda y un dato atípico (el 98) en cambio en el año 2019 los datos no están centrados con un prominente sesgo a la izquierda y un dato atípico (el 85). Además los datos del 2018 están bastante centrados

¿Evolución anual de la concentración?

d) $Z: [6, 9, 8, 14, -2, 12, -4, 25, -10, 23, 8, 7]$

	$[-10, -3]$	$(-3, 4]$	$(4, 11]$	$(11, 18]$	$(18, 25]$	
n_i	2	1	5	2	2	12
f_i	1/6	1/12	5/12	1/6	1/6	
h_i	1/42	1/84	5/84	1/42	1/42	



Histograma de densidades

Hecho en máxima más preciso

Hecho con máxima

$\bar{Z} = 8$

$\sigma_n = 9'747$

Cálculo del porcentaje

e) Hecho en máxima

$\bar{Z} = 8$

$\sigma_{n-1} = 10'18$

$t^{11}_{0'975} = 2'201$

$\hat{\mu} = \bar{Z} \pm t^{11}_{0'975} \frac{\sigma}{\sqrt{12}} = 8 \pm 2'201 \cdot \frac{10'18}{\sqrt{12}} = 8 \pm 6'468$

No es razonable ya que $\hat{\mu} \neq 0$ por lo que la concentración no se ha mantenido constante de un año a otro

d) Cálculo del porcentaje

$Z \pm \sigma_n = [-1'747, 17'747]$

$\text{Área} = [-1'747, 4) \cdot \frac{1}{84} + \frac{5}{12} + [11, 17'747] \frac{1}{42} =$

$\text{Área} = 5'747 \cdot \frac{1}{84} + \frac{5}{12} + 6'747 \cdot \frac{1}{42} = 0'6457$

64'57% de datos en $Z \pm \sigma_n$

2. Se estudia si la actividad A de cierta enzima depende de la concentración de sacarosa $[S]$ según un modelo michaeliano

$$A = \frac{a[S]}{b + [S]},$$

donde a, b son parámetros positivos. En el laboratorio se han medido los siguientes datos para distintos valores de $[S]$ (en mM)

$[S]$	0.10	0.25	0.5	1	2	5	10	15
A	16	43	82	149	269	450	550	615

2'5

(i) Usa la linealización $\frac{A}{S} = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}A$, para estimar el valor de los parámetros a y b.

(ii) Representa en una gráfica los datos originales (S, A) y la curva de Michaelis-Menten que has obtenido, y describe si te parece un buen ajuste.

(iii) Utiliza el método de mínimos cuadrados para dar otra estimación de a y b. Representa ambas conjuntamente y decide qué ajuste te parece mejor.

(iv) Usando el mejor ajuste, pronostica para qué valor de $[S]$ se alcanza un 75% de la actividad máxima de la enzima.

Nota: 2'5 puntos.

i) $\underbrace{\frac{A}{S}}_{Y} = \underbrace{\frac{a}{b}}_{A} - \underbrace{\frac{1}{b}}_{B}\underbrace{A}_{X}$

$y = A - BX$

$y = \frac{A}{S}$

$A = \frac{a}{b}$ $\quad B = \frac{1}{b}$

$X = A$

X	16	43	82	149	269	450	550	615
y	160	172	164	149	134'5	90	55	41

Regresión lineal hecho con máxima

$y = 178'78446 - 0'21379X$ ✓

$r = -0'9848$

$B = 0'21379 = \frac{1}{b}$

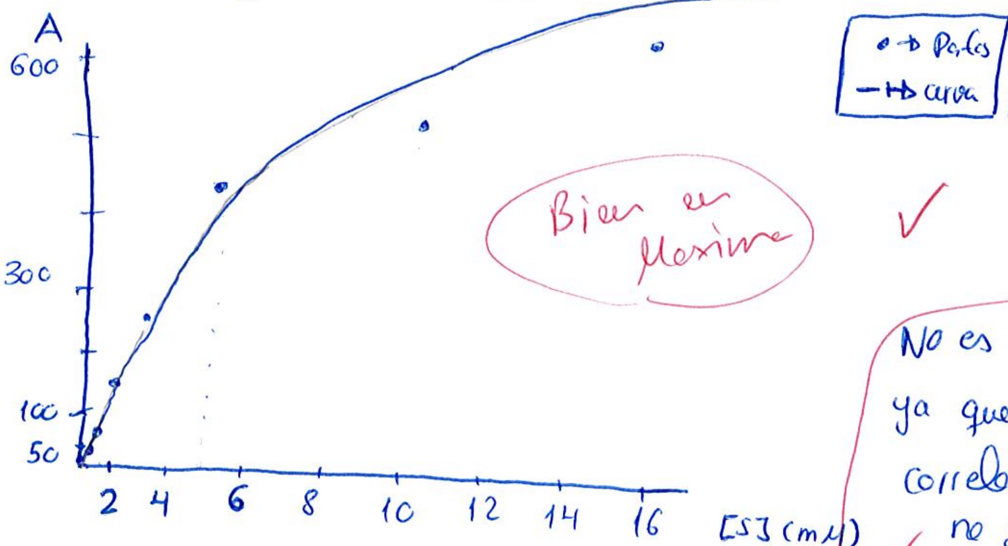
$b = \frac{1}{0'21379} = 4'6775 \text{ mM}$ ✓

$A = \frac{836'269\,[S]}{4'6775 + [S]}$

$A = 178'784 = \frac{a}{b}$

$a = 178'784 \cdot 4'6775 = 836'269$ ✓

ii)



Hecho en máxima con mayor precisión

Bien en Maxima ✓

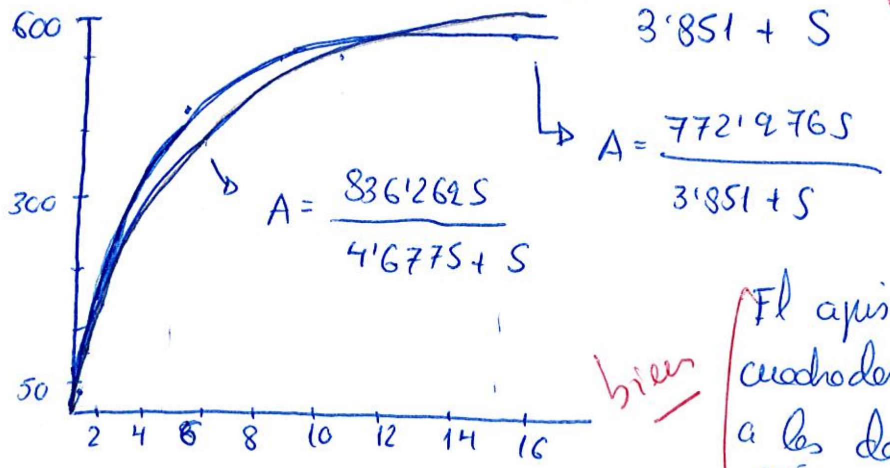
No es un ajuste malo ya que el coeficiente de correlación es alto, aunque no se ajusta perfectamente a los datos. Quizás los valores de a y b demasiado altos ✓

bien explicado

iii)

Tras el ajuste por mínimos cuadrados en máxima de la función $A = \frac{aS}{b+S}$, los resultados obtenidos son $a = 772'976$ y $b = 3'851$ quedando la ecuación de la curva

$$A = \frac{772'976\,S}{3'851 + S}$$ ✓



En máxima representado con mayor precisión

mejor usar 2 colores

bien

El ajuste utilizando mínimos cuadrados se ajusta mucho mejor a los datos obtenidos, a y b son más cercanos a la realidad.

iv)

$a = 772'976$

El 75% de a es → 579'732

$$579'732 = \frac{772'976\,S}{3'851 + S}$$

$$2232'548 + 579'732\,S = 772'976\,S$$

$$2232'548 = 193'244\,S$$

$S = 11'553$ ✓

$A = 579'732$ $\quad \hat{S} = 11'553\ mM$

Perfecto

3. Se sabe que la actividad de 2 enzimas A y B, en términos de un parámetro x, viene dada por las funciones

$$A(x) = \frac{100x^2}{100x^2+10x+1} \quad \text{y} \quad B(x) = \frac{30x}{100x^2+10x+1}, \quad 0 \leq x \leq 5.$$ 3.

a) Dibuja en un mismo gráfico ambas funciones $A(x)$ y $B(x)$, primero en la escala usual, y después en escala logarítmica en x, y decide cuál se visualiza mejor.

b) A partir de las gráficas determina: límite de $A(x)$ y $B(x)$ si $x \to \infty$; cuándo se tiene $A(x) = B(x)$; para qué x es B máximo; punto de inflexión de A.

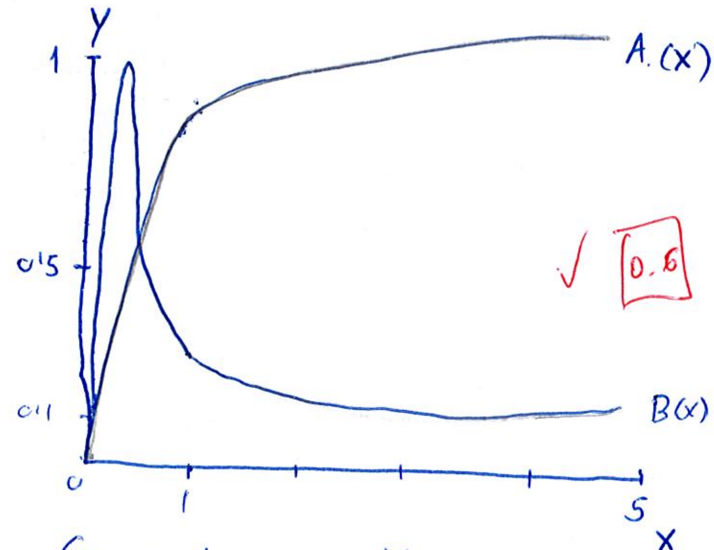
c) Dibuja la gráfica de $A'(x)$ y determina su valor máximo

d) Calcula el área bajo la curva $B(x)$ cuando $0 \leq x \leq 1$.

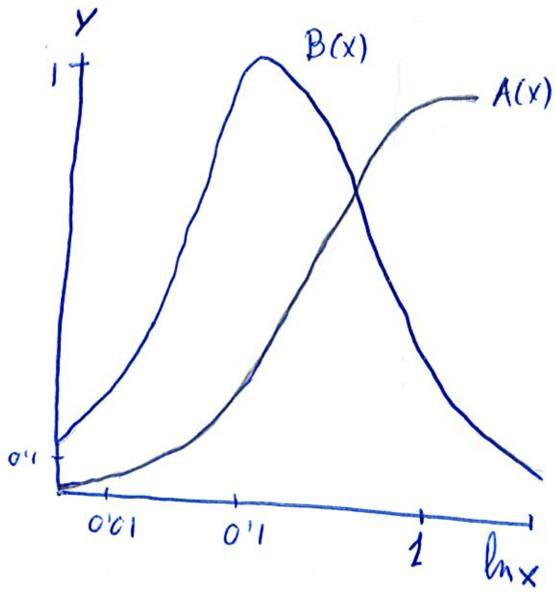
e) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de $A(x)$ entorno al punto $a = 0$. Dibújalo con Maxima, escogiendo una ventana en que se visualicen claramente ambas funciones.

Nota: 3 puntos.

a)



✓ $\boxed{0.6}$



Con mejor precisión en Máxima
En escala log se visualiza mejor.

b) Limites

$\lim_{x \to \infty} A(X) = 1$ ✓ $\lim_{x \to \infty} B(X) = 0$ ✓

A(X) = B(X) $\dfrac{100x^2}{100x^2+10x+1} = \dfrac{30x}{100x^2+10+1}$

$100x^2 = 30x$

$100x^2 - 30x = 0$

$x(100x-30) = 0 \to x = 0$
$\to x = 0'3$ ✓

A(x) = B(x) cuando $x = 0$ y $x = 0'3$

Máximo B

$B'(x) = \dfrac{30(100x^2+10x+1) - 30x(200x+10)}{(100x^2+10x+1)^2} \overset{\text{Hecho en máxima}}{=} - \dfrac{3000x^2-30}{1000x^4+2000x^3+300x^2+20x+1}$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 3000x^2 - 30 = 0 \quad x = \pm 0'1 \quad x = 0'1$ ✓

$$B''(x) = \frac{600000x^3 - 18000x - 600}{1000000x^6 + 300000x^5 + 60000x^4 + 7000x^3 + 600x^2 + 30x + 1}$$

$B''(0'1) = -66'666 < 0 \rightarrow$ Máximo en $\boxed{x = 0'1}$ Máximo $(0'1, 1)$

Punto de inflexión en A

0'6

$$A''(x) = \frac{200(1000x^3 + 300x^2 - 1)}{(100x^2 + 10x + 1)^3}$$

$A''(x) = 0 \rightarrow 200(1000x^3 + 300x^2 - 1) = 0$

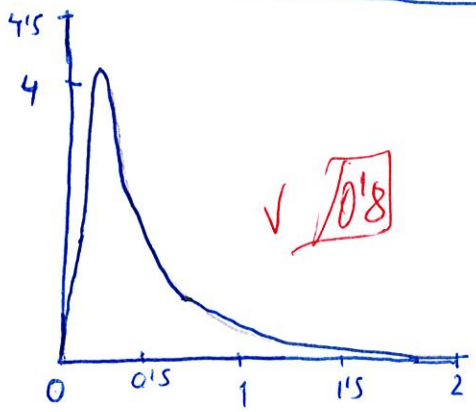
$x = 0'0532$

$$A'''(x) = \frac{6000(10x-1)(10x+1)(100x^2+40x+1)}{(100x^2+10x+1)^4}$$

$A'''(0'0532) = -1351'56 \neq 0$

Cálculos complejos y derivadas en máxima $\rightarrow$ Punto de inflexión en $\boxed{x = 0'0532}$

c)



0'8

$A''(x) = 0 \rightarrow x = 0'053$ $\quad A'(x) = \frac{200x(5x+1)}{(100x^2+10x+1)^2}$

$A'''(0'053) = -135'56 < 0 \rightarrow$ Máximo en $\boxed{x = 0'0532}$

Igual que el ejercicio anterior, el punto de inflexión de $A(x)$ corresponde al máximo de $A'(x)$

$x = 0'0532 \rightarrow y = 4'0889$

d) $\int_0^1 B(x)dx = F(1) - F(0) = \underline{0'5393\ u^2}$ 0'4

Hecho en máxima la integral tanto definida como indefinida

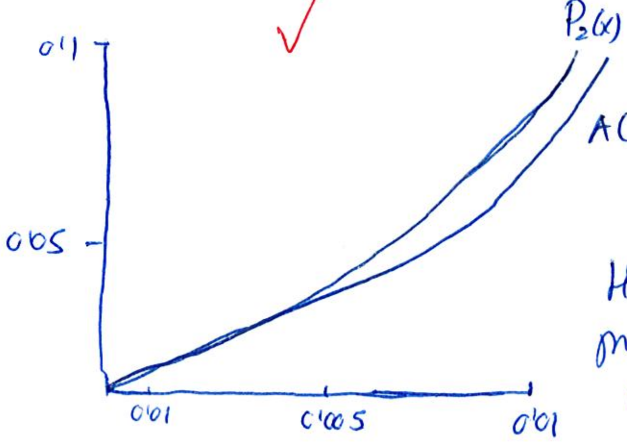
$$\int B(x)dx = 30\left(\frac{\ln(100x^2+10x+1)}{200} - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{200x+10}{10\sqrt{3}}\right)}{100\sqrt{3}}\right)$$

$a = 0$

e) $P_2(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{200}{2!}(x-0)^2 = 100x^2$ $\quad P_2(x) = 100x^2$

$A(0) = 0$
$A'(0) = 0$
$A''(0) = 200$
Hecho en máxima

0'6



Hecho con mayor precisión en máxima

4. Un recipiente contiene 2 litros de disolución con una cantidad inicial de 100 mgr de nitratos. Para rebajar su concentración añadimos desde un grifo externo un flujo de 0'1 l/min de agua con 10 mgr/l de nitratos, a la vez que el mismo flujo sale del recipiente por un sumidero. Llamamos $x(t)$ = mgr de NO_3 en la disolución tras t minutos.

a) Formula una ED para $x(t)$, y calcula la solución de equilibrio x_{eq}.

b) Supón ahora que, debido a un proceso más complejo, $x(t)$ cumple

$$\begin{cases} x'(t) = r\,x(t)\,(200 - x(t)) \\ x(0) = 100 \end{cases}$$

2

Resuelve esta ED en términos del parámetro r (puedes usar Maxima). Para $r = \frac{1}{200}$, dibuja la gráfica de $x(t)$ y determina cuándo será $x(t) = 190$ mg.

Nota: 2 puntos.

a) $V = 2\,L$

$X_0 = 100$ mgr

Entra → 0'1 L/min con 10 mgr/L

Sale → 0'1 L/min

$$\underbrace{x'(t)}_{\frac{mgr}{min}} = \underbrace{\underbrace{0'1}_{\frac{L}{min}} \cdot \underbrace{10}_{\frac{mgr}{L}}}_{\frac{mgr}{min}} - \underbrace{\underbrace{0'1}_{\frac{L}{min}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{L}}\, \underbrace{x(t)}_{mgr}}_{\frac{mgr}{min}}$$

$$x'(t) = 1 - \frac{0'1}{2}\,x(t)$$ ✓

$$0 = 1 - \frac{0'1}{2}\,x_{eq}$$

$$\frac{0'1}{2}\,x_{eq} = 1$$

$\boxed{x_{eq} = 20 \text{ mgr nitratos}}$ ✓

$$x(t) = 20 + C\,e^{-t/20} \xrightarrow[x=100]{t=0} 100 = 20 + C \qquad C = 80$$

$$\boxed{x(t) = 20 + 80\,e^{-t/20}}$$ ✓

b)
$$\begin{cases} x'(t) = r\,x(t)\,(200 - x(t)) \\ x(0) = 100 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = r\,x(200-x) \qquad \frac{dx}{x(200-x)} = r\cdot dt$$

$$\int \frac{dx}{x(200-x)} = \frac{1}{200}\ln|x| - \frac{1}{200}\ln|200-x| \qquad \frac{\ln|x| - \ln|200-x|}{r\;200} = t + C$$

$$\xrightarrow[x=100]{t=0} \frac{\ln 100 - \ln|100|}{r\;200} = C = 0$$

$$\frac{\ln|x| - \ln|200-x|}{r\ 200} = t$$

$$\ln|x| - \ln|200-x| = 200rt$$

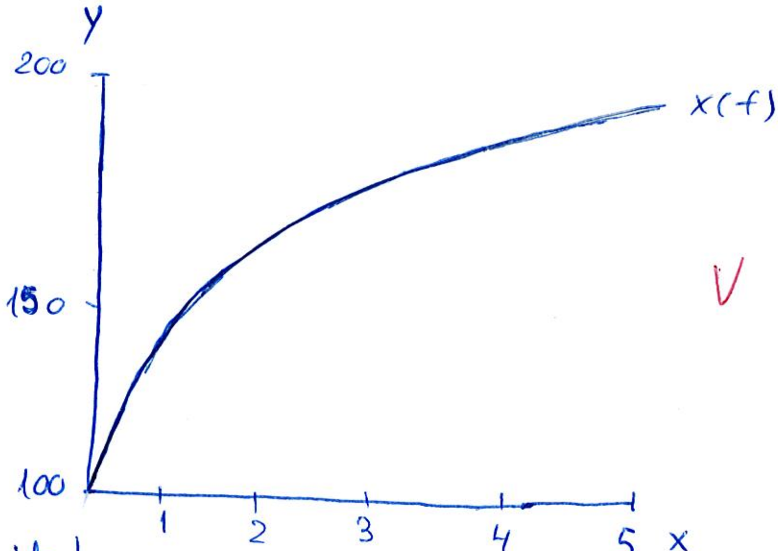
$$\ln\left|\frac{x}{200-x}\right| = 200rt \qquad \left|\frac{x}{200-x}\right| = e^{200rt}$$

$$\frac{x}{200-x} = e^{200rt} \xrightarrow[\text{x con máxima}]{\text{despejo}} x = \frac{200e^{200rt}}{e^{200rt}+1}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{200e^{200rt}}{e^{200rt}+1}}$$

$$r = \frac{1}{200}$$

$$x(t) = \frac{200e^{t}}{e^{t}+1}$$



Hecho con mayor precisión en máxima

$t \,/\, x(t) = 190$ mgr

$$190 = \frac{200e^{t}}{e^{t}+1} \qquad 190e^{t} + 190 = 200e^{t}$$

$$190 = 10e^{t} \qquad \ln 190 = \ln 10 + \ln e^{t}$$

$$\ln 190 = \ln 10 + t$$

$$t = \ln 190 - \ln 10 = \boxed{2'9444 \text{ min}}$$

A los 2'9444 minutos alcanza 190 mg