

Nombre:

SOLUCIONES

10

1.- Un país tiene una deuda de 100 millones de euros con un gran banco. Con la tasa de interés que aplica el banco la deuda crece un 4% cada año. Las partes pactan que al final de cada año el país liquide parte de la deuda, mediante un pago anual de  $L = 5$  millones de euros.

- (a) Determina una expresión para  $x(n)$  = deuda del país al inicio del año  $n$  (en millones).
- (b) ¿Cuánto tiempo tardaría en pagarse toda la deuda?
- (c) Si duplicamos el pago, tomando  $L = 10$ , ¿cuánto tiempo tardaría en pagarse la deuda?
- (d) Si queremos que la deuda se liquide en 20 años, ¿de qué importe  $L$  deberían ser los pagos anuales?

- Deuda inicial = 100 m de euros.  
 - Se añade un 4% de deuda cada año.  
 - Pagan  $L = 5$  millones al año.

a)  $x(0) = 100$  millones

$$x(1) = x(0) + 0.04 \cdot x(0) - L = 1.04 \cdot x(0) - L$$

⋮

$$x(3) = x(2) + 0.04 \cdot x(2) - L = 1.04^3 \cdot x(0) - 1.04^2 \cdot L - 1.04 \cdot L - L$$

Por tanto,  $x(n)$  se puede expresar como:  $x(n) = 1.04^n \cdot x(0) - L [1.04^{n-1} + 1.04^{n-2} + \dots + 1]$

La progresión obtenida ocupa la fórmula  $\frac{R^n - 1}{R - 1}$ , quedando  $x(n) = 1.04^n \cdot x(0) - L \left( \frac{1.04^n - 1}{1.04 - 1} \right)$

$x(n)$  = n de millones de deuda al comienzo del año  $n$ , por lo que ya se ha pagado, aumentado el interés

Y simplificando  $x(n) = 1.04^n \cdot [x(0) - 25L] + 25L$  ✓

b)  $n / x(n) = 0$

$$x(n) = 1.04^n \cdot (100 - 25 \cdot 5) + 25 \cdot 5 = 0$$

$$x(n) = -25 \cdot 1.04^n + 125 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-125}{-25} = 1.04^n \Rightarrow \ln 5 = n \cdot \ln 1.04$$

$$n = \frac{\ln 5}{\ln 1.04} \approx 41 \text{ años tardaría en liquidarse la deuda}$$
 ✓

c) Si  $L = 10$ ,  $n / x(n) = 0$

$$x(n) = 1.04^n \cdot (100 - 25 \cdot 10) + 10 \cdot 25 = 0$$

$$x(n) = -150 \cdot 1.04^n + 250 = 0$$

$$\frac{-250}{-150} = 1.04^n \Rightarrow 1.67 = 1.04^n \Rightarrow n = \frac{\ln 1.67}{\ln 1.04} \approx 13.5 \text{ años en liquidarse}$$
 ✓

d)  $L / x(20) = 0$

$$x(20) = 1.04^{20} \cdot (100 - 25L) + 25L = 0$$

$$219 - 1.04^{20} \cdot 25L + 25L = 0$$

$$219 - 54.78L + 25L = 0$$

$$219 = 29.78L$$

$$L = 7.35 \text{ millones deberían pagar a final de cada año}$$
 ✓