Matemáticas. 1º Bioquímica. Convocatoria enero, 8/1/2024

Nombre: ....

1. Se han medido las concentraciones de lactato en sangre arterial (en mmol/l), de 7 deportistas antes, durante y después de realizar un ejercicio controlado. Los datos recogidos han sido

Antes	0.93	0.55	0.87	0.62	0.72	0.79	0.75
Durante	6.7	8.85	4.56	7.29	5.88	6.96	6.7
Después	2.05	2.98	1.17	2.71	1.84	2.36	2.18

a) Utiliza Maxima para representar en un mismo gráfico los 3 boxplots (con datos atípicos, si los hubiera). Describe lo que observas, y explica si hay diferencias significativas entre los grupos.

b) Para el grupo que tiene datos atípicos, dibuja a mano su diagrama de tallos y hojas, y calcula su mediana y cuartiles.

c) En otro experimento se mide el lactato en sangre a 70 deportistas tras 30 min de ejercicio, obteniéndose la siguiente tabla de datos agrupados.

concentr (mmol/l)	[2,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,10]
núm indiv	1	6	20	25	15	3

Dibuja a mano un histograma de densidades para estos datos.

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad del box-plot dibujado con Maxima (escala correcta, datos atípicos, etc...)

2. En un experimento de tipo Michaelis-Menten se obtienen los siguientes datos para (S, V)

S	0.1	0.3	0.5	1	2.5	5	10	18
V	15	33	44	56	67	74	78	79

(i) Representa los datos $(S, S/V)$, y dibújalos junto con su recta de regresión.

(ii) Sabiendo que $\dfrac{S}{V} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{a} S$, estima el valor de los parámetros a y b

(iii) Representa en una gráfica los datos originales (S, V) y la curva de Michaelis-Menten $V = aS/(b + S)$, con los parámetros a, b obtenidos en (ii). Describe la calidad del ajuste.

(iv) Utiliza mínimos cuadrados para dar otra estimación de a y b, con `tol`=0'0001. En un mismo gráfico, compara esta curva con la obtenida en (iii) y decide qué ajuste parece mejor.

(v) ¿Para qué valor de S se alcanza un 75% de la velocidad máxima de la enzima?

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad de las gráficas dibujadas con Maxima (escala correcta, etiquetas en los ejes, etc...)

3. Durante una epidemia de gripe en dos poblaciones, A y B, las velocidades de propagación de la enfermedad vienen dadas por la función

$$A(t) = 1000\,t\,\exp(-0'5t^2), \quad \text{y} \quad B(t) = 1000\,t^2\,\exp(-t^3/6), \quad t > 0$$

donde las unidades son nº casos/semana (y t en semanas).

a) Dibuja las gráficas de $A(t)$ y $B(t)$, con las etiquetas y unidades adecuadas en los ejes. Describe de forma aproximada los aspectos que visualmente te parezcan más relevantes.

b) Calcula cuándo se igualan $A(t)$ y $B(t)$, y cuál de las funciones es mayor a largo plazo.

c) Para la función $B(t)$, calcula el valor del pico máximo y cuándo se alcanza éste.

d) Para la función A, dibuja la gráfica de la derivada $A'(t)$, y determina a partir de ella el valor aproximado del punto de inflexión de la función A.

e) Para la función A, calcula el polinomio de Taylor de grado 3 entorno al origen, y dibuja su gráfica junto a la de $A(t)$ para $t \in [0, 1]$.

f) Calcula el área entre las curvas $A(t)$ y $B(t)$ cuando $1 \leq t \leq 3$.

Nota: 3 puntos

4. En un paciente con leucemia se ha observado una disminución semanal del leucocitos en sangre del 4%. Se le somete a un tratamiento que aumenta su nivel de leucocitos en 160 unid al final de cada semana. Si al inicio del tratamiento su nivel de leucocitos era de 3500 unid, y si

   $x(t) =$ nivel de leucocitos en sangre tras t semanas.

   a) Plantea una ecuación diferencial para $x(t)$, calcula la solución de equilibrio y esboza la gráfica de $x(t)$. ¿Qué ocurrirá a largo plazo?

   b) Resuelve la ecuación diferencial, y determina el nivel de leucocitos tras 12 semanas.

   Nota: 2 puntos

Examen enero 2024

```
(% i1) ratprint:false;
```

false (% o1)

1 Lactato

```
(% i4) x1:[0.93, 0.55 ,0.87, 0.62, 0.72 ,0.79,0.75];
       x2:[6.7, 8.85, 4.56, 7.29 ,5.88 ,6.96 ,6.7];
       x3:[ 2.05 ,2.98 ,1.17 ,2.71 ,1.84 ,2.36 ,2.18];
```

$[0.93, 0.55, 0.87, 0.62, 0.72, 0.79, 0.75]$ (% o2)

$[6.7, 8.85, 4.56, 7.29, 5.88, 6.96, 6.7]$ (% o3)

$[2.05, 2.98, 1.17, 2.71, 1.84, 2.36, 2.18]$ (% o4)

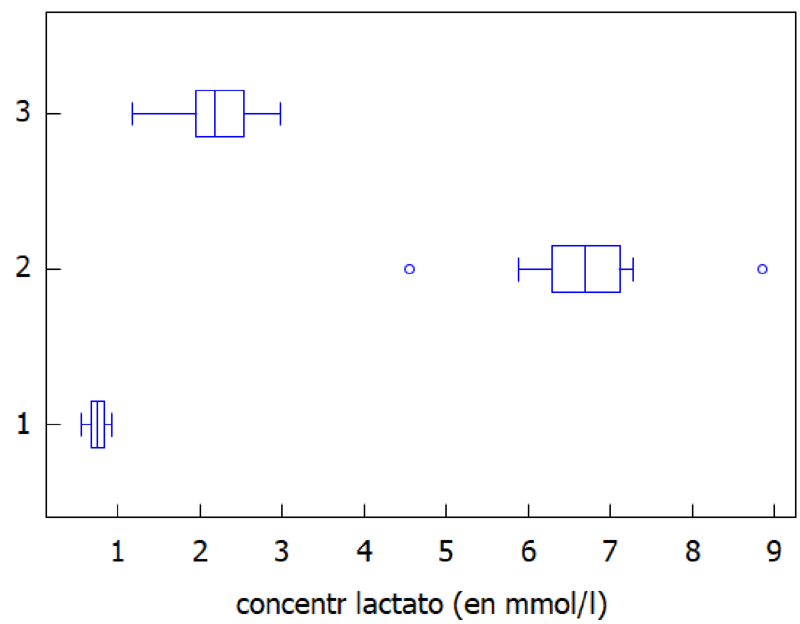
```
(% i5) load(descriptive);
```

(% o5)

"C:/programas_ instalados/WxMaxima/maxima-5.45.1/bin/../share/maxima/5.45.1/share/descriptive/descri

1.0.1 a) Boxplot (con maxima)

(% i8) wxboxplot([x1, x2, x3], box_orientation=horizontal, box_width=0.3, range=1.5,
xlabel="concentr lactato (en mmol/l)");



(% t8)

(% o8)

EXPLICACIÓN:La concentración de lactato aumenta claramente "durante" el deporte (centrado aprox en 7), es mucho más baja "antes" (por debajo de 1), y se mantiene intermedia "después" (entre 1 y 3). Además, "antes" se aprecian unas datos muy centrados y muy poco dispersos, mientras que "durante" y "después" la dispersión aumenta bastante (incluso con 2 datos atípicos "durante"), y aparecen ligeros sesgos (sesgo hacia la izda "después"). Esta variabilidad puede ser consecuencia de las distintas respuestas de los individuos al experimento realizado.

1.0.2 b)~Stemplot (a mano), y mediana, cuartiles del grupo 2

−> stemplot(x2, leaf_unit=0.1);

4|6 5|9 6|77 7|03 8|8

"key: 6|3 = " " "

6.3

" "

done (% o26)

−> median(x2); quantile(x2, 0.25); quantile(x2,0.75);

6.7 (% o27)

6.29 (% o28)

7.125 (% o29)

Haciendo los cálculos a mano (con el convenio dado en los apuntes) hubiera salidoMediana = dato central = x_4 = 6'7Cuartil 1 = dato central primera mitad =~x_2 =~5'9Cuartil 3 =~dato central segunda mitad = x_6 =~7'3Ambas respuestas (a mano o con Maxima) se consideran correctas

1.0.3 c) histograma de densidades (a mano)

Completamos la tabla calculando las marcas de clase, los f_j, h_j, etc...

(% i10) m:[3,4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 9];
f:[1 ,6 ,20 ,25 ,15 ,3];

$[3, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 9]$ (% o9)

$[1, 6, 20, 25, 15, 3]$ (% o10)

(% i11) f1:f/70,numer;

[0.01428571428571429 , 0.08571428571428572 , 0.2857142857142857 , 0.3571428571428572 , 0.2142857142857143 ,

(% o11)

para calcular los h_j necesito dividir f_j por la longitud de cada intervalo l_j

(% i12) l:[2,1,1,1,1,2];

[2 , 1 , 1 , 1 , 1 , 2] (% o12)

(% i13) h:f1/l;

[0.007142857142857143 , 0.08571428571428572 , 0.2857142857142857 , 0.3571428571428572 , 0.2142857142857143

(% o13)

0.02142857142857143]

NOTA:∼el histograma de densidades hay que dibujarlo A MANO (como pide el ejercicio), pues máxima no devuelve la respuesta correcta cuando los intervalos tienen distintas longitudes (y es complicado generar las listas)...

2 Regresión

(% i18) numer:true;
ratprint:false;

true (% o17)

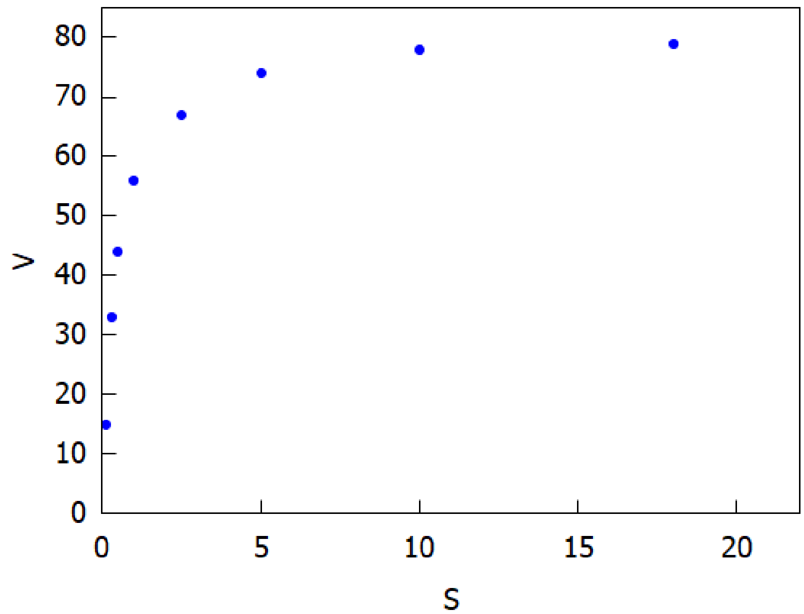
false (% o18)

(% i16) S:[0.1, 0.3, 0.5 ,1 ,2.5, 5 ,10 ,18];
V:[15 ,33, 44 ,56 ,67, 74 ,78, 79];

[0.1 , 0.3 , 0.5 , 1 , 2.5 , 5 , 10 , 18] (% o15)

[15 , 33 , 44 , 56 , 67 , 74 , 78 , 79] (% o16)

(% i20) wxdraw2d(point_type=7, points(S,V), xrange=[0, 22], yrange=[0, 85], xlabel= "S", ylabel= "V") ;



(% t20)

(% o20)

2.1 a) dibujar y ajustar datos (S, S/V)

(% i21) numer:true;

true (% o21)

(% i23) x:S;
y:S/V;

$[0.1\,, 0.3\,, 0.5\,, 1\,, 2.5\,, 5\,, 10\,, 18]$ (% o22)

$[0.006666666666666667\,, 0.00909090909090909\,, 0.01136363636363636\,, 0.01785714285714286\,, 0.03731343283582$

(% o23)

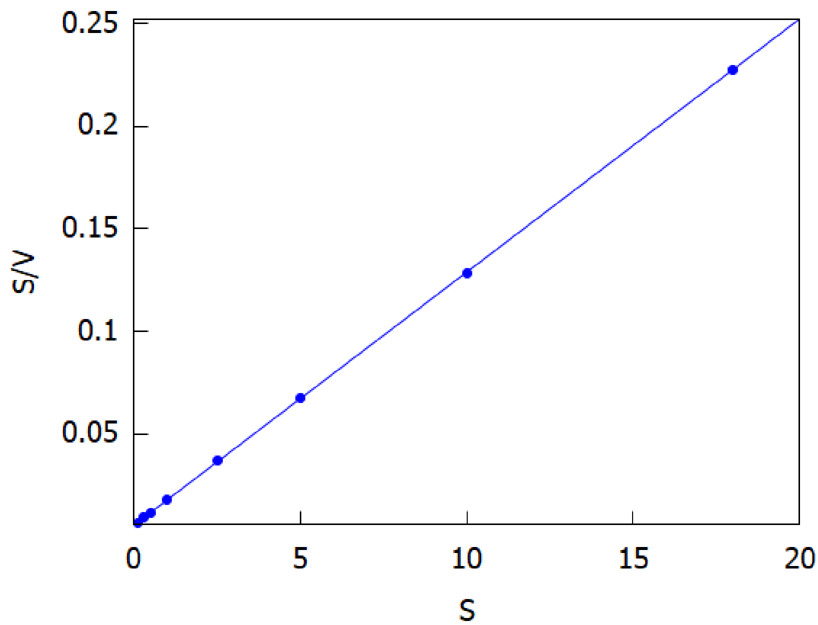
(% i24) xy:transpose(matrix(x,y));

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.006666666666666667 \\ 0.3 & 0.00909090909090909 \\ 0.5 & 0.01136363636363636 \\ 1 & 0.01785714285714286 \\ 2.5 & 0.03731343283582089 \\ 5 & 0.06756756756756757 \\ 10 & 0.1282051282051282 \\ 18 & 0.2278481012658228 \end{pmatrix} \quad (\% \text{ o24})$$

(% i25) simple_linear_regression(xy);

$$\begin{array}{c} \text{"}SIMPLELINEARREGRESSION\text{"} \\ \text{model} = 0.01233777605015008x + 0.005559970072135177 \\ \text{correlation} = 0.999980319989091 \\ v_{\text{estimation}} = 2.813599629331011 10^{-7} \\ \text{b\_conf\_int} = [0.01226045216669853\,, 0.01241509993360163] \\ \text{hypotheses} = \text{"}H0 : b = 0, H1 : b \neq 0\text{"} \\ \text{statistic} = 390.4285336729122 \\ \text{distribution} = [\text{student}_t\,, 6] \\ p_{\text{value}} = 1.909583602355269 10^{-14} \end{array} \quad (\% \text{ o25})$$

(% i27) wxdraw2d(point_type=7, points(xy), explicit(0.01233777605015008*'x+0.005559970072135177,'x, 0, 20),
xlabel="S", ylabel="S/V");



(% t27)

(% o27)

Datos razonablemente bien alineados, con correlación muy alta r=0.999980319989091

2.2 a y b

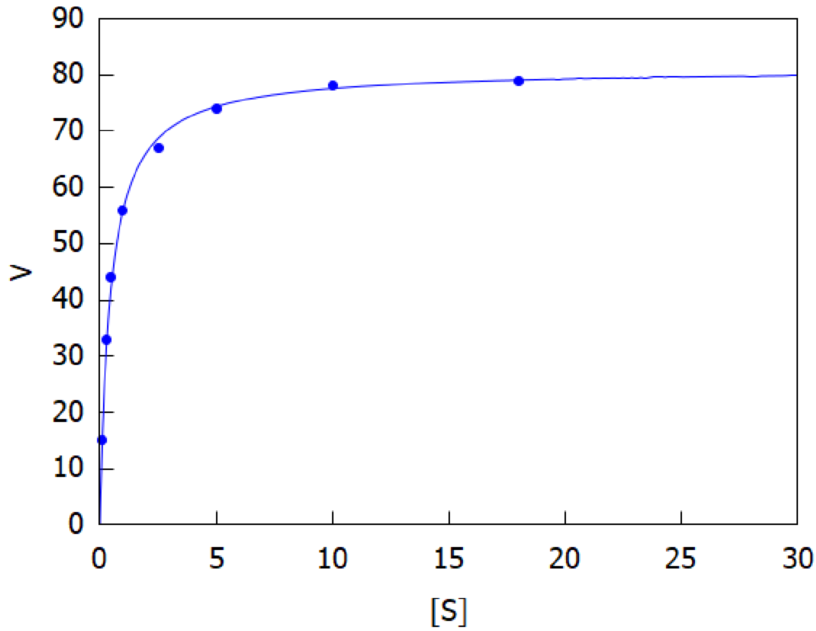
(% i29) a:1/0.01233777605015008;
b:a*0.005559970072135177;

81.05188454833687 (% o28)

0.4506460523789086 (% o29)

2.3 Dibujar datos originales y curva Michaelis-Menten

(% i30) wxdraw2d(point_type=7, points(S,V), explicit(a*'x/(b+'x), 'x, 0, 30), yrange=[0, 90], xlabel="[S]", ylabel="V");



(% t30)

(% o30)

El ajuste que se observa es muy bueno, con la curva muy pegada a los datos...

2.4 regresion no lineal

--> load(lsquares);

(% o96)

"C:/programas_ instalados/WxMaxima/maxima-5.45.1/bin/../share/maxima/5.45.1/share/lsquares/lsquares.

–> SV:transpose(matrix(S,V));

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 15 \\ 0.3 & 33 \\ 0.5 & 44 \\ 1 & 56 \\ 2.5 & 67 \\ 5 & 74 \\ 10 & 78 \\ 18 & 79 \end{pmatrix} \quad (\%\ o97)$$

–> kill(a1,b1);

done (% o99)

–> mse:lsquares_mse(SV, ['x,'y], 'y=a1*'x/(b1+'x));

$$0.125 \sum_{i=1}^{8} \left(\mathrm{SV}_{i,2} - \frac{\mathrm{a1SV}_{i,1}}{\mathrm{SV}_{i,1} + \mathrm{b1}} \right)^2 \quad (\%\ o100)$$

–> lsquares_estimates_approximate(mse,[a1,b1], initial=[a,b], tol=0.0001);

*** N= 2 NUMBER OF CORRECTIONS=25 INITIAL

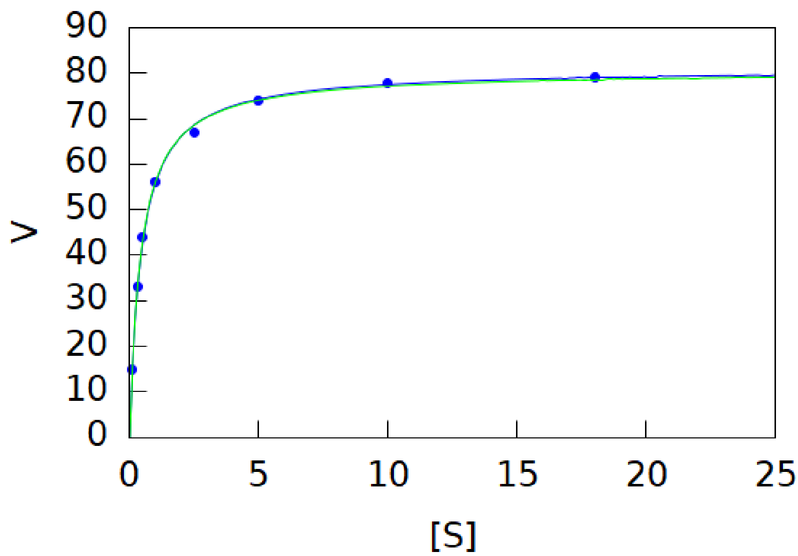
$$[[\mathrm{a1} = 80.52147380799084\,, \mathrm{b1} = 0.4331812812412363]] \quad (\%\ o101)$$

–> a1:80.52147380799084;b1:0.4331812812412363;

80.52147380799084 (% o102)

0.4331812812412363 (% o103)

–>   wxdraw2d(point_type=7, points(S,V), explicit(a*'x/(b+'x), 'x, 0, 25), yrange=[0, 90], xlabel="[S]", ylabel="V",
color=green,
explicit(a1*'x/(b1+'x), 'x, 0, 25));



(% t106)

(% o106)

Los ajustes son esencialmente iguales, el segundo ligeramente mejor pues minimiza el error cuadrático medio...

2.5 Valor de S para 75% de veloc max

–>   a1*s/(b1+s)=0.75*a1;

$$\frac{80.52147380799084s}{s+0.4331812812412363}=60.39110535599313 \quad (\%\ o111)$$

–>   solve([%], [s]);

$$[s=1.299543843723721] \quad (\%\ o112)$$

3 Poblaciones

(% i60) A(t):= 1000*t*exp(-0.5*t^ 2);

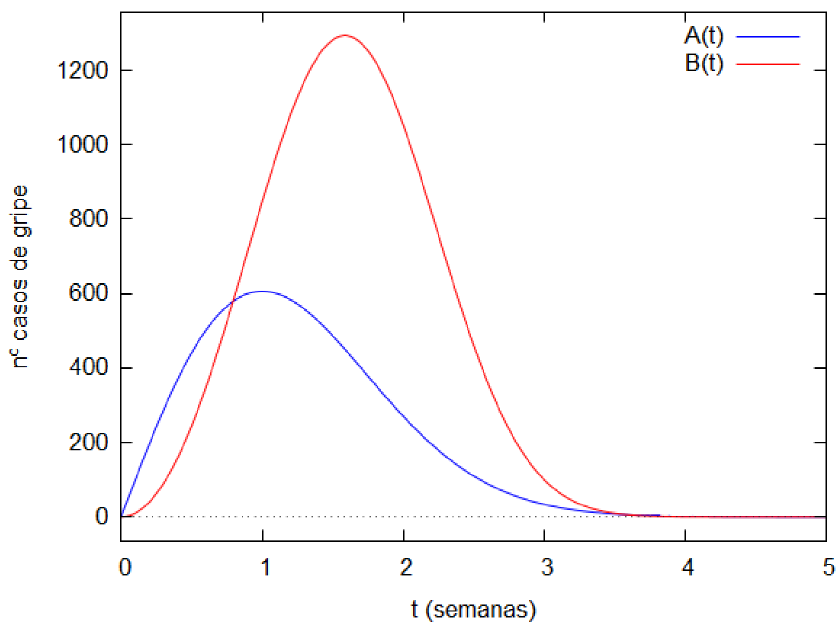
$$\mathrm{A}(t) := 1000t \exp\left((-0.5)\,t^2\right) \tag{\% o60}$$

(% i32) B(t):=1000*t^ 2*exp(-t^ 3/6);

$$\mathrm{B}(t) := 1000t^2 \exp\left(\frac{-t^3}{6}\right) \tag{\% o32}$$

3.1 a) dibujar y explicar

(% i38) wxplot2d([A(t), B(t)], [t,0,5], [legend, "A(t)", "B(t)"] ,
[xlabel, "t (semanas)"], [ylabel, "nº casos de gripe"])$



(% t38)

Ambas comienzan en el origen, crecen hasta alcanzar un pico, y después decrecen rápidamente a 0.El pico de A(t) se alcanza antes que el de B(t), aunque es un pico considerablemente más bajo (aprox A(1)=600 y B(1,6)=1300).

3.2 b) ptos corte y comparación a largo plazo

A ojo vemos que A(t)=B(t) aprox cuando t=0'8 y posteriormente en t=3,6 aprox.Calculamos los valores exactos con findroot

–> find_root(A(t)=B(t), t, 0.1, 1);

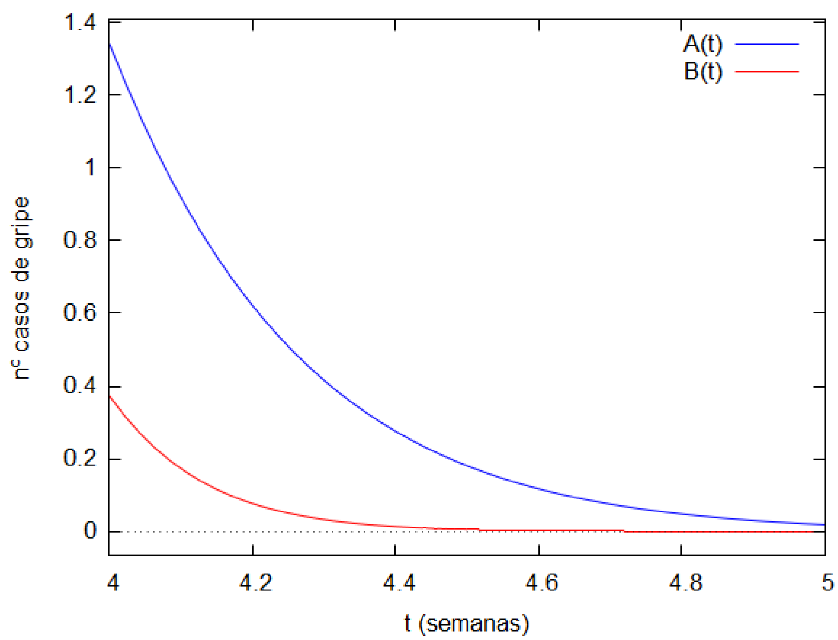
0.7933567015878971 (% o27)

–> find_root(A(t)=B(t), t, 3, 4);

3.594192939128633 (% o28)

A ojo vemos que a largo plazo ambas tienden a 0, pero A(t) (azul) es ligeramente mayor que B(t) (roja)

(% i45) wxplot2d([A(t), B(t)], [t,4,5], [legend, "A(t)", "B(t)"] , [xlabel, "t (semanas)"], [ylabel, "nº casos de gripe"])$



(% t45)

Esto se comprueba exacto tomando el límite del cociente A(t)/B(t)...

–> limit(A(t)/B(t), t, inf);

∞ (% o31)

NOTA: también se ve en las fórmulas: A(t) decae como una exponencial exp(-a*t2̂), y B(t) como exp(-b*t3̂)

3.3 c) Máximos de B(t)

A ojo, el maximo de B aprox en t=1.58 y valor 1280...Para hallar el valor exacto derivamos e igualamos a ceroB'(t) = 0...

--> diff(B(t),t,1);

$$2000t\%e^{-0.1666666666666667t^3} - 500.0t^4\%e^{-0.1666666666666667t^3} \quad (\%\ o34)$$

--> B1(t):=2000*t*%e^ (-0.1666666666666667*t^ 3)-500.0*t^ 4*%e^ (-0.1666666666666667*t^ 3);

$$B1(t) := 2000t\%e^{(-0.1666666666666667)t^3} - 500.0t^4\%e^{(-0.1666666666666667)t^3} \quad (\%\ o36)$$

--> find_root(B1(t)=0, t, 1, 2);

1.5874010519682 (% o39)

--> B(1.5874010519682);

1293.730071291089 (% o40)

3.4 Gráfica de A'(t) y pto inflexión de A(t)

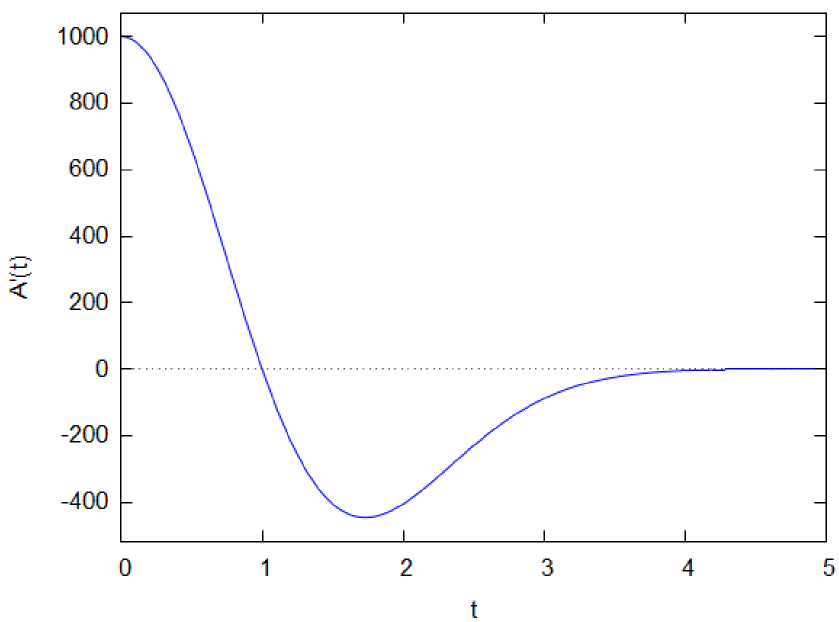
--> diff(A(t),t,1);

$$1000\%e^{-0.5t^2} - 1000.0t^2\%e^{-0.5t^2} \quad (\%\ o41)$$

(% i47) A1(t):=1000*%e^ (-0.5*t^ 2)-1000.0*t^ 2*%e^ (-0.5*t^ 2);

$$A1(t) := 1000\%e^{(-0.5)t^2} - 1000.0t^2\%e^{(-0.5)t^2} \quad (\%\ o47)$$

(% i50) wxplot2d([A1(t)], [t,0,5], [ylabel, "A'(t)"])$



(% t50)

Aquí se observa un mínimo de A'(t) en t= 1'73 aprox. Ese mínimo de A'(t)corresponderá a un ptoinflexión de A(t). Lo calculamos exacto resolviendoA"(t) =~0

–> diff(A(t),t,2);

$$1000.0t^3\%e^{-0.5t^2} - 3000.0t\%e^{-0.5t^2} \quad \text{(\% o46)}$$

(% i51) A2(t):=1000.0*t^ 3*%e^ (-0.5*t^ 2)-3000.0*t*%e^ (-0.5*t^ 2);

$$\mathrm{A2}(t) := 1000.0t^3\%e^{(-0.5)t^2} - 3000.0t\%e^{(-0.5)t^2} \quad \text{(\% o51)}$$

(% i53) numer:false;

false (% o53)

(% i54) solve([A2(t)=0], [t]);

$$\left[t = -\sqrt{3}, t = \sqrt{3}, t = 0\right] \quad \text{(\% o54)}$$

(% **i55**) sqrt(3), numer;

1.732050807568877 (% o55)

pto inflexión en t=sqrt(3) =~1'732...,

3.5 e) polin de Taylor de grado 3

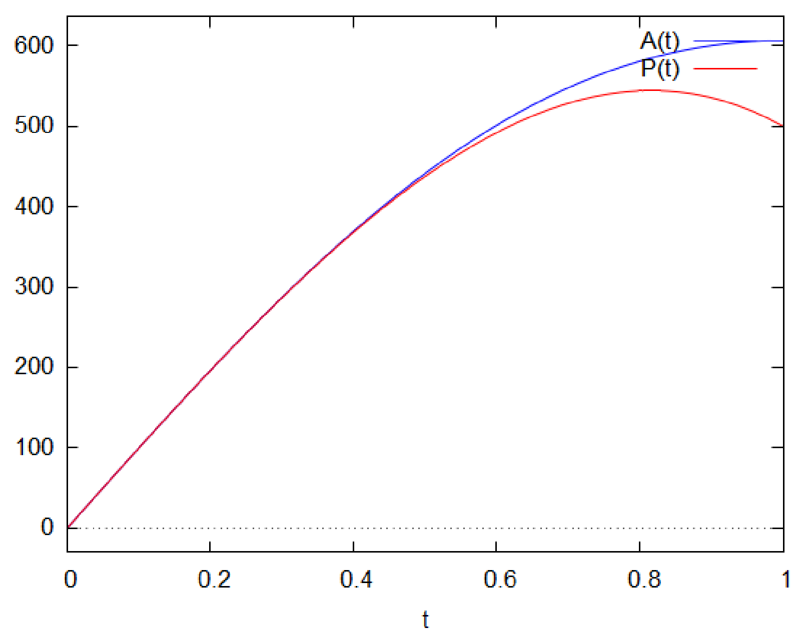
(% **i56**) taylor(A(t), t, 0, 3);

$1000t - 500t^3 + \ldots$ (% o56)/T)

(% **i57**) P(t):=1000*t-500*t^ 3;

$\mathrm{P}(t) := 1000t - 500t^3$ (% o57)

(% **i66**) wxplot2d([A(t), P(t)], [t,0,1], [legend, "A(t)", "P(t)"])$

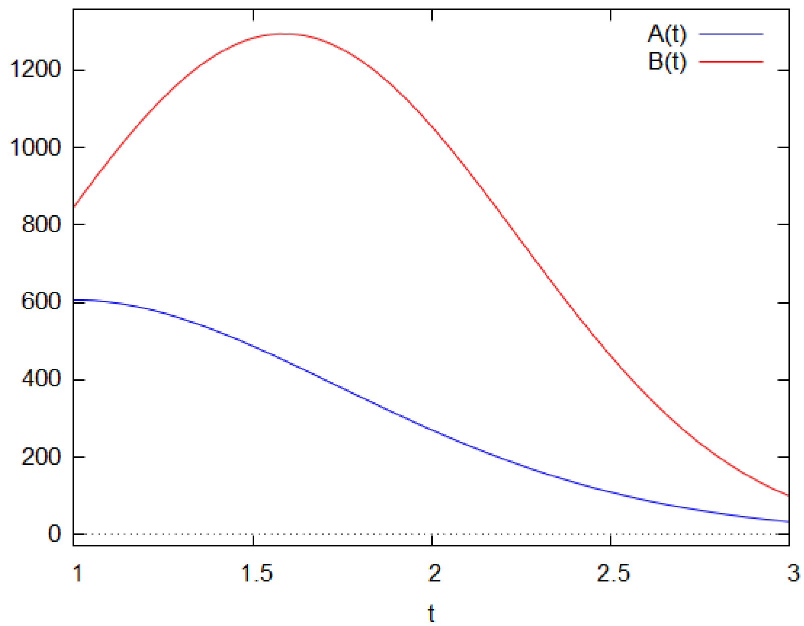


(% t66)

3.6 f) Área entre las curvas cuando t está entre 1 y 3

Observar que en ese rango de t, B(t) está por encima de A(t)

(% i68) wxplot2d([A(t), B(t)], [t,1,3], [legend, "A(t)", "B(t)"])$



(% t68)

Por tanto debemos calcular la integral de B(t) - A(t)

(% i67) numer:true;

true (% o67)

(% i69) integrate(B(t)-A(t), t, 1, 3);

1075.323793530352 (% o69)

4 ED

4.1 a) plantear al ED a mano —> x' = -0.04*x +160

4.2 b) Resolver la ED (a mano o con Maxima)

--> kill(x);

done (% o62)

--> ed1:'diff(x,t)=-0.04*x+160;

$$\frac{d}{dt}x = 160 - 0.04x \qquad (\%\ o76)$$

--> ode2(ed1, x, t);

$$x = \%e^{-0.04t}\left(4000.0\%e^{0.04t} + \%\mathrm{c}\right) \qquad (\%\ o77)$$

--> ic1(%, t=0, x=3500);

$$x = 4000 - 500\%e^{-0.04t} \qquad (\%\ o78)$$

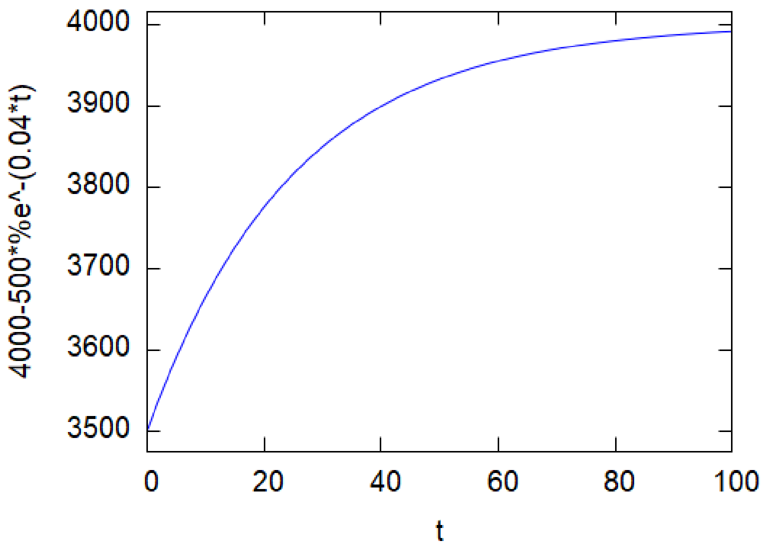
--> x(t):=4000-500*%e^ (-0.04*t);

$$\mathrm{x}(t) := 4000 - 500\%e^{(-0.04)t} \qquad (\%\ o79)$$

--> x(12);

3690.60830409693 (% o80)

–> wxplot2d([x(t)], [t,0,100])$



(%t81)