ECUACIONES DIFERENCIALES $\quad$ 1º de grado en Biotecnología

HOJA 2: Álgebra lineal y dinámica de poblaciones

1. Resolver las siguientes ecuaciones con el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+y-z=0 \\ 3x+2y-z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-z=5 \\ x+y-z=1 \\ x+\ kz=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x+y-z\ =2 \\ 2x+3y-2z+5w=2 \end{cases}$$

2. Tenemos un anillo de oro y plata con peso 350 gr y volumen 25 ml. Sabiendo que las densidades son $d_{\mathrm{Au}}=20$ y $d_{\mathrm{Ag}}=10$ (en gr/ml), hallar las cantidades netas de oro y plata en el anillo.

3. Un granjero da de comer a su ganado dos tipos de piensos A y B. Cada kg de pienso A le aporta un 10% de las proteínas y un 15% de los carbohidratos que diariamente necesita el animal. Por otro lado, cada kg de pienso B le aporta un 12% de las proteínas y un 8% de los carbohidratos. ¿Cuántos kgs de cada pienso debe dar diariamente a su ganado?

4. En un laboratorio se quiere sintetizar una molécula $X_6Y_{10}Z_8$. Para ello se dispone de dos compuestos primitivos $X_1Y_3Z_5$ y $X_3Y_3Z_3$. ¿Será posible realizar una reacción perfecta? ¿Y si conseguimos dividir el primer compuesto en $X_1Y_1Z_4+Y_2Z_1$?

5. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Calcula las potencias A^2, A^4, A^6, A^{-2}.

b) Multiplica en el orden que sea posible las matrices A y B; B y B^t; B y C; A y X.

b) Calcula los determinantes $\det(A+aI)$, $\det(B\cdot B^t)$, $\det(C^2)$.

6. Calcula A^2, A^3 y A^4 y deduce una fórmula para A^n para las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Considera las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula sus autovectores y autovalores, y escribe la matriz como $A=PDP^{-1}$, con D diagonal.

b) Encuentra una fórmula para A^n y para e^{tA}.

8. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B. Se sabe que cada día un 70% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 50% de aves de B lo hace a A. Si inicialmente había 120 aves en cada humedal,

   a) describe en forma matricial la evolución de la población tras n días.

   b) Calcula el número de aves en cada humedal tras dos días, y a largo plazo.

   c) Determina la distribución exacta de aves tras n días y esboza los datos en una gráfica.

9. Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y de cada grupo se obtiene la siguiente información sobre fertilidad (número medio de crías hembras en cada período) y mortalidad:

GRUPO DE EDAD:	0 a 3	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0	0'63	1'00	0'90
MORTALIDAD:	43%	43%	43%	100%

Formula un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, a) calcula la composición (aproximada) de la población tras dos períodos de tiempo?

b) Utiliza el ordenador para explicar la evolución de la población a largo plazo.

c) Explica cómo cambia el modelo si conseguimos reducir la mortalidad de los alevines a sólo un 10%.

10. En una granja de cría de cerdos, los animales son clasificados según sus edades de la siguiente forma:

    - cochinillos (de 0 a 1 año), lechones (1 a 2 años), jóvenes (2 a 3 años), adultos (3 a 4 años).

    El procedimiento de gestión de las hembras de la granja es el siguiente:

    - Se sacrifica al 60% de las que van naciendo para su consumo como cochinillos.
    - Se sacrifica para su consumo a todas las hembras cuando llegan a los 4 años. No se sacrifica a ninguna de las demás, y se supone que ningún animal muere por otras causas.
    - Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, en las camadas nacen 5 cochinillos (la mitad hembras), y también que las hembras jóvenes tienen una media de 0'5 camadas al año y las adultas de 0'8.

    Formular el modelo apropiado para describir la evolución del número de hembras en cada clase.

11. Se realiza un seguimiento de una población de nútrias en un bosque de ribera. Se observa que al considerar dos grupos de edad (jóvenes y adultos), la correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Determina a partir de la matriz la mortalidad y fecundidad de cada clase.
    b) Si inicialmente se sueltan 12 animales jóvenes, calcula a mano (o con excel) algunos valores de $X(n)$. Utiliza estos datos para estimar en qué porcentaje crece la población en cada período, y que proporción de individuos hay en cada clase.
    c) Usando el autovalor y autovector dominantes, determina las proporciones anteriores a largo plazo.

12. La población de una especie de cabra introducida en un parque natural evoluciona según la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

    donde se ha dividido la población para su estudio en hembras jóvenes y adultas (mayores de 1 año).

    a) Demuestra que, a la larga, la población crecerá por un factor aproximado de 1.27.
    b) Determina la forma de la matriz si al final de cada año (tras los períodos de natalidad y mortalidad naturales de la especie) se permite cazar una proporción h de individuos adultos.
    c) Prueba que una caza del 50% de los adultos es demasiado intensiva, es decir, la población se extinguiría.
    d) Determina un valor de h para que la población se mantenga estable. ¿Qué proporción de individuos de cada tipo habrá en ese caso?

13. Una población de conejos de laboratorio tiene las siguientes características: la vida máxima de cada conejo es de 3 años; sólo la cuarta parte de los conejos sobrevive el primer año, y de éstos, sólo la mitad sobrevive el segundo año. Los conejos de primer año no tienen descendencia, mientras el número medio de descendientes es de 13 en el segundo año y de 12 en el tercero.

    (a) Escribe la matriz de Leslie que describe la evolución de esta población.

    (b) Experimentalmente se observa que la población total de conejos esencialmente se duplica cada año. ¿Sabrías justificar por qué esto es así? Calcula a partir de este dato el porcentaje de conejos que habrá en cada clase.

    (c) Por motivos de espacio, querríamos que la población total creciera, a lo sumo, un 50% cada año. Para ello el laboratorio sólo conserva k crías por cada conejo de segundo año, vendiéndose el resto. ¿Quién debería ser k?

14. Cierto gen controla el color de una especie de flor, pudiendo ser roja (AA), rosa (Aa) o blanca (aa). Suponer que inicialmente comenzamos con 100 % de flores blancas, y en cada generación posterior los cruces los realizamos siempre con flores de color rosa (Aa).

    a) Formula un modelo matricial para el porcentaje de flores de cada color en la generación n.

    b) Determina la proporción de flores de cada color a largo plazo.

    c) Con ayuda del ordenador, esboza la evolución del color de las flores en cada generación. ¿Cuándo se alcanzará un 20% de flores rojas?

15. De cierto gen se sabe que puede aparecer en estado A, B ó C. Cuando aparece en estado A tiene una probabilidad del 50% de transmitirse a la generación siguiente en estado A, un 25% de cambiar a B y otro 25% de cambiar a C. Cuando está en estado B siempre cambia, un 25% a estado A y el resto a C. Por último, si está en estado C se mantiene en él un 75% de las veces, y cambia a A el 25% restante.

    a) Formula un modelo matricial para la evolución del estado del gen en la generación n.

    b) Determina las proporciones de cada estado a largo plazo, y esboza la gráfica de la evolución cuando la proporción inicial es (50%,40%,10%).

16. Un país está dividido en tres zonas demográficas: interior, costa e islas. Cada año un 5% de la población interior emigra a la costa y otro 5% a las islas. De los residentes en la costa un 10% se muda al interior y un 5% a las islas. Por último, entre los isleños un 15% emigra al interior y un 10% a la costa.

    (a) Formula un sistema para la evolución de esta población.

    (b) Determina el porcentaje de población que residirá en cada región a largo plazo. Si inicialmente toda la población está en el interior, ¿cuánto tiempo aproximadamente tardará en alcanzarse el equilibrio? (puedes utilizar Excel).

    (c) Por motivos estratégicos, el gobierno desea que al menos un 25% de la población resida en las islas. Para ello limita la emigración de isleños a un porcentaje fijo α cada año. Sabiendo que entre los emigrantes isleños el 60% escoge destinos del interior, ¿cuál debe ser el valor de α para que se cumplan los deseos del gobierno?

Ejercicios complementarios para practicar con ordenador

17. Modelo de Fibonacci. Para una población de conejos dividida en 2 clases, jóvenes (no fértiles) y adultos (fértiles), el modelo supone que los jóvenes tardan 1 mes en ser fértiles, y que cada adulto tiene 1 cría al mes. Si inicialmente empezamos con 1 adulto,

    a) Hallar una recurrencia para el número de conejos jóvenes x_n y adultos y_n tras n meses, y escribirla en forma matricial. Utiliza el ordenador para esbozar la evolución de x_n, y_n.

    b) Determina la tasa de crecimiento mensual, y las proporciones de jóvenes y adultos a largo plazo.

    c) Utiliza el ordenador para diagonalizar la matriz del sistema, hallar A^n, y calcular el valor exacto de x_n, y_n. ¿Cuándo llega la población al millón de individuos?