ECUACIONES DIFERENCIALES $\quad$ 1º de grado en Biotecnología

HOJA 3: Sistemas y ecuaciones diferenciales de orden 2

1. En una reacción química reversible se tienen dos moléculas A y B que en presencia de una enzima se transforman una en otra y viceversa, es decir $A \leftrightarrow B$. Se sabe que cada minuto el 6% de A se transforma en B, y el 2% de B se transforma en A.

   (a) Formula una ecuación diferencial para este problema. A largo plazo, ¿qué proporción habrá de cada una de las moléculas?

   (b) Resolver la ecuación si inicialmente la cantidad de A es el doble que la de B. ¿Cuándo será la cantidad de B el doble que la de A?

2. Un restaurante dispone de dos salones comedor, uno para fumadores y otro para no fumadores. El sistema de aire acondicionado limpia un 1% del volumen de cada sala por minuto. Por otro lado, los salones se comunican entre sí por una puerta abierta, intercambiando entre ellos otro 1% de su volumen cada minuto. Formula con ecuaciones diferenciales las siguientes dos situaciones.

   (a) A la hora de cierre hay 100 litros de humo en la primera sala y nada en la segunda. Resuelve la ED y determina la cantidad máxima de humo en la segunda sala.

   (b) A la hora de apertura las salas están limpias, pero se generan durante la noche 3 litros de humo por minuto en la primera sala, ¿qué cantidad de humo habrá en la segunda sala a largo plazo?

3. En el curso de un río hay dos lagunas. Se ha observado que cada día la primera laguna vierte un 10% de su contenido en la segunda, y ésta un 5% de su contenido río abajo. Un camión accidentado vierte sobre la primera laguna 100 litros de un producto tóxico muy soluble.

   (a) Formula una ED para la cantidad de contaminante en cada laguna, y esboza la gráfica de la solución.

   (b) Resuelve la ED y calcula cuándo será máxima la cantidad de contaminante en la segunda laguna, y qué cantidad de contaminante habrá en cada una de ellas en ese momento.

   (c) Determina la cantidad de contaminante acumulado río abajo tras t días. ¿Cuánto tardará en llegar un tercio del contaminante inicial? ¿Cuánto hubiera tardado si no estuviera la segunda laguna?

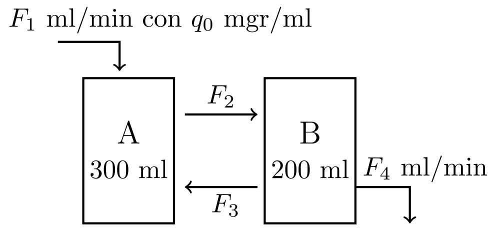
4. Una salina de 200 m^3 intercambia con el mar un caudal de 5 m^3 de agua por día. La salina está conectada con canales con una pequeña balsa de volumen 30 m^3, intercambiándose entre ellas 1 m^3 de agua al día. Una plaga de algas llega a esa zona costera, de modo que el agua de mar que entra en la salina tiene una concentración de 50 gramos de algas por m^3. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan respectivamente la cantidad de algas en la salina y en la balsa tras t días.

   a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ e $y(t)$.

   b) Formula una ecuación diferencial para las *concentraciones* de algas $q_1(t)$ y $q_2(t)$, en la salina y en la balsa. ¿Cuáles serán las concentraciones de algas a largo plazo?

5. Un modelo sencillo para la circulación sanguínea en los riñones considera éstos divididos en dos compartimentos A (exterior) y B (interior), cuyos volúmenes supondremos de 300 y 200 ml respectivamente. La sangre entra en el compartimento A, intercambia parte del flujo con el compartimento B, y desde éste último sale al exterior (ver dibujo). Suponer que la sangre entrante contiene un medicamento con concentración q_0 mgr/ml, de modo que las cantidades de medicamento $x(t)$ e $y(t)$ en cada compartimento tras t minutos cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) = -0'02\,x(t) + 0'01\,y(t) + 6 \\ y'(t) = 0'02\,x(t) - 0'03\,y(t) \end{cases}$$



(a) A partir de la ED determina el valor de las constantes F_1, F_2, F_3, F_4 y q_0 en el diagrama.

(b) A largo plazo, ¿cuántos mgr de medicamento habrá en cada compartimento? ¿Y en qué concentración?

(c) Resuelve la ED para $x(0) = 750$ mgr , $y(0) = 0$.

(d) Esboza las gráficas de $x(t)$ e $y(t)$ obtenidas en (c). ¿Cuándo será máxima $y(t)$?

6. `Modelo competitivo:` Dos especies compiten en un territorio; la presencia de una disminuye la tasa de crecimiento de la otra y viceversa:

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$$

Resuelve la ecuación sabiendo que inicialmente $x(0) = 90$ y $y(0) = 150$. ¿Desaparece alguna de las dos especies?

7. `Modelo simbiótico:` Dos especies cooperan; la tasa de crecimiento de cada una mejora con la presencia de la otra pero sufre con la abundancia de ella misma:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Resuelve la ecuación sabiendo que inicialmente $x(0) = 200$ y $y(0) = 500$. Esboza las gráficas de las soluciones.

8. `Modelo presa-depredador:` La abundancia del depredador daña la tasa de crecimiento de la presa:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

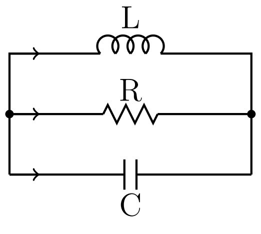
¿Cuál es el depredador y cuál la presa? Resuelve la ecuación para $x(0) = y(0) = 1000$.

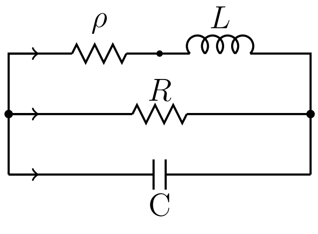
9. Para los circuitos de la figura, el voltaje en el condensador $V(t)$ y la intensidad de corriente por la inductancia $I(t)$ cumplen respectivamente

$$\text{i)} \begin{cases} V' = -\frac{1}{RC}V - \frac{1}{C}\,I \\ I' = \frac{1}{L}\,V \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} V' = -\frac{1}{RC}V - \frac{1}{C}\,I \\ I' = \frac{1}{L}\,V - \frac{\rho}{L}I \end{cases}$$

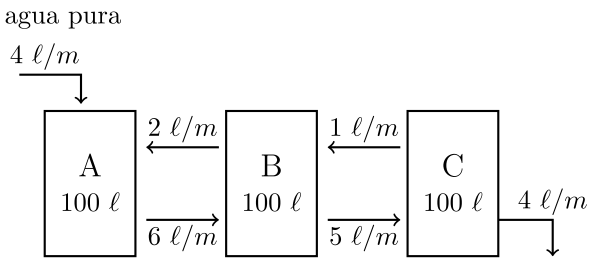
(i) Resolver cuando $R = L = 1$, $C = 1/2$, $V(0) = 1$, $I(0) = 2$.

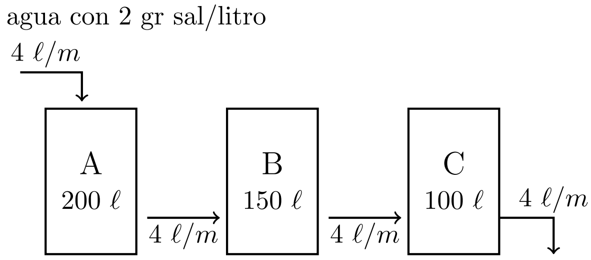
(ii) Resolver cuando $\rho = L = 1$, $R = 2$, $C = 1/2$, $V(0) = -2$, $I(0) = 1$. ¿A partir de qué valor de ρ cesa el comportamiento oscilatorio?





10. Para cada una de las figuras, formula un sistema de ecuaciones diferenciales para las cantidades de sal $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ en cada uno de los depósitos. Sin resolver las EDs, determina las cantidades de sal en cada depósito a largo plazo.





11. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$a)\begin{cases} x''+5x'+6x=0 \\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x''+6x'+9x=0 \\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x''+2x'+2x=0 \\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=0 \end{cases}$$

Esboza la gráfica de la solución y determina el máximo y mínimo de $x(t)$ en cada caso.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales *no homogéneas*:

$$a)\begin{cases} x''+5x'+6x=5\sin t \\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x''+6x'+9x=3t+2 \\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x''+2x'+2x=te^{-t} \\ x(0)=1\ ,\ x'(0)=0 \end{cases}$$

Esboza la gráfica de la solución en cada caso, y determina el comportamiento a largo plazo.

13. La posición de un muelle viene dada por la ecuación diferencial

$$x''(t)+6x'(t)+10x(t)=0.$$

Si inicialmente $x(0)=1$ cm y $x'(0)=-3$ cm/s,

(a) Resuelve la ecuación diferencial y esboza la gráfica de la solución.

(b) Determina la compresión máxima que alcanza el muelle.

(c) ¿Cuánto tendría que reducirse el rozamiento para que la frecuencia de oscilación se duplique?

(d) Suponer que reducimos el rozamiento a $\rho = 0'1$, y aplicamos adicionalmente una fuerza externa $F(t) = \sin(\omega t)$. Utiliza el ordenador para dibujar las soluciones cuando $\omega = 1$ y $\omega = \sqrt{10}$, y explica el comportamiento de $x(t)$ a largo plazo.

14. En un circuito LCR la cantidad de carga en el condensador, $Q(t)$, cumple

$$LQ''(t)+RQ'(t)+\frac{Q(t)}{C}=0.$$

Suponer que $L=0'25$, $R=10$ y $C=0'001$. Si inicialmente $Q(0)=3$ y $Q'(0)=0$

(a) Hallar la carga en el condensador $Q(t)$ y esbozar su gráfica

(b) ¿Cuándo será la carga en el condensador menor que 0’01?

(c) ¿Cuánto debería ser R para que la carga en el condensador no oscilara?

Ejercicios para practicar con ordenador

15. La siguiente ecuación es un modelo más realista de presa-depredador (V. Volterra 1926)

$$\begin{cases} x' = -0'1x + 0'03xy \\ y' = 0'2y - 0'25xy \end{cases}$$

(a) Explica cómo crece cada población en ausencia de la otra, y qué ocurre cuando están juntas. ¿Cuál es la solución de equilibrio?

(b) Suponer ahora que, en una época de bonanza mejoran las tasas de supervivencia de ambas especies, quedando la ecuación de la forma

$$\begin{cases} x' = -0'02x + 0'03xy \\ y' = 0'3y - 0'25xy \end{cases}$$

¿Cuál es ahora la solución de equilibrio? ¿Es razonable que a pesar de la bonanza se haya *reducido* la población de presas?

(c) Suponer por el contrario que se introduce un pesticida para intentar acabar con la presa, si bien dicho pesticida también afecta al crecimiento natural del depredador, quedando la ecuación

$$\begin{cases} x' = -0'2x + 0'03xy \\ y' = 0'05y - 0'25xy \end{cases}$$

¿Cuál es ahora la solución de equilibrio? ¿Es razonable que el efecto del pesticida haya sido *aumentar* la población de presas?

Nota: En todos los casos es ilustrativo dibujar con ordenador las soluciones para un dato inicial fijo (digamos $x(0) = 2$, $y(0) = 8$), observando en las gráficas cómo afectan los cambios a las poblaciones.

16. Ciertas reacciones químicas tienen comportamientos oscilatorios parecidos al ejercicio anterior (*chemical clocks* o *chemical oscillators*).

• Consideremos una reacción química de la forma

$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to E$$

donde la cantidad de reactivo A es muy grande (y se puede suponer constante). Formula un modelo para la evolución de las concentraciones $x(t), y(t)$ de los reactivos X e Y.

• En el modelo *Brusselator*[1] las concentraciones $x(t)$ e $y(t)$ de dos reactivos X e Y cumplen la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x' = a - (b+1)x + x^2 y \\ y' = bx - x^2 y \end{cases}$$

(a) Calcula las soluciones de equilibrio.

(b) Comprueba que si $b < 1 + a^2$, el sistema evoluciona hacia una solución de equilibrio constante.

(c) Cuando $b > 1 + a^2$ el sistema evoluciona hacia una solución periódica (*chemical clock*). Comprueba este hecho con un ordenador, utilizando por ejemplo $a = 1$ y $b = 2.5$ (con datos iniciales arbitrarios).

[1] Modelo teórico introducido por el premio Nobel de Química I. Prigogine en 1968; la mecánica de reacción es

$$A \to X \qquad B + X \to Y + E \qquad 2X + Y \to 3X \qquad X \to E.$$

17. Un modelo simplificado para la transmisión de los impulsos neuronales establece que la diferencia de potencial $V(t)$ entre el interior y exterior de la membrana celular satisface la ecuación diferencial

$$V'(t) = V(t) - \frac{1}{3}V(t)^3 - W(t) + I, \quad W'(t) = 0.08 * \big(V(t) + 0.7 - 0.8 * W(t)\big),$$

donde I es la corriente entrante y $W(t)$ una función auxiliar que cuantifica el flujo de iones que entran y salen de la célula.

a) Para $I = 0$, dibuja y describe las soluciones con $V(0) = 1$, $W(0) = 0$. Determina si variando $V(0)$ cambia significativamente el aspecto de la solución (hay un umbral de $V(0)$ que al superarlo produce un "spike").

b) Estudiar el efecto de aumentar el valor de I entre 0 y 2 (usa la opción "sliders" en plotdf). Determina a partir de qué valores de I se producen soluciones periódicas (tren de "spikes"), y a partir de qué valor dejan de producirse.

18. El modelo SIR de epidemias se formula con las EDs

$$S' = -k * S * I, \quad I' = k * I * S - r * I, \quad R' = r * I$$

donde $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ son los números de individuos susceptibles, infectados y recuperados tras t días, y k =tasa contagio/nº hab y r = tasa recuperación son ctes positivas.

Resolver numéricamente las EDs y explicar el comportamiento de las soluciones cuando $N = 1000$ individuos, $S(0) = 990$, $I(0) = 10$, y para las siguientes situaciones de los parámetros

a) situación sin tratamiento específico, con $k = 1/1000$, $r = 0.2$

b) política de prevención de contagios $k = 0.5/1000$, $r = 0.2$

c) política adicional de aislamiento de enfermos $k = 0.5/1000$, $r = 0.3$

d) nueva mejora en tasa de contagios $k = 0.3/1000$, $r = 0.3$.

19. En el estudio de enfermedades infantiles (sarampión), al modelo SIR anterior le añadimos un factor de inmigración, quedando las ecuaciones

$$S' = -k * S * I - m * S + m * N, \quad I' = k * I * S - r * I - m * I, \quad R' = r * I - m * R$$

donde m =tasa de natalidad, que suponemos igual a la tasa de abandono del período infantil.

Resuelve numéricamente las EDs y explica el comportamiento de las soluciones cuando $N = 1000$ individuos, $S(0) = 990$, $I(0) = 10$, $m = 0'03$, y para los siguientes contextos de parámetros

a) nueva cepa sin tratamiento específico $k = 1/1000$, $r = 0.1$

b) política prevención de contagios $k = 0.5/1000$, $r = 0.1$

c) política adicional de aislamiento de enfermos $k = 0.5/1000$, $r = 0.2$

d) modelo a) con vacunación de la población S con tasa $v = 0.3$

e) determina la tasa de vacunacion v para que el procentaje endémico de individuos enfermos no supere el 5% del total.