Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología   Control 1, 17/3/2014

[redacted] 10

1.- Tenemos un tanque con 300 litros de una disolución al 5 % de ácido sulfúrico y agua, cuya concentración deseamos rebajar de forma progresiva sin parar el funcionamiento del tanque, del que se extraen 2 litros/min de disolución. Para ello introducimos desde un grifo externo 4 litros/min de disolución con una concentración menor.
Si sabemos que la **cantidad** $x(t)$ de H_2SO_4 presente en el tanque tras t minutos cumple la ED

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{150+t} + 0'1,$$

a) Determina la concentración entrante, y el volumen de la disolución en el tanque tras t minutos. 5

b) Resuelve la ecuación diferencial y encuentra una expresión para $x(t)$.

c) ¿Cuál será la *concentración* en el tanque cuándo éste llegue a los 500 litros?

Nota: 5 puntos

a.)

$4 \, l/min \times q \; H_2SO_4 \longrightarrow 4 \cdot q = 0'1 \longrightarrow q = 0'025 = 2'5\%$ // ✓

$v'(t) = 4-2 = 2 \longrightarrow v(t) = 2t + C \longrightarrow v(0) = 300 \longrightarrow 300 = C \longrightarrow v(t) = 2t+300$ // ✓

$x'(t) = \frac{2}{2t+300} x(t) + 0'1 = \frac{1}{t+150} x(t) + 0'1$

b.)

$x'(t) = -\frac{1}{150+t} x(t) + 0'1 \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-x}{150+t} \longrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{150+t} \longrightarrow \ln(x) = -\ln 150+t + C$

$e^{\ln(x)} = e^{\ln(150+t)^{-1}} \cdot e^{C} \longrightarrow x = \frac{e^{C} = k}{150+t} \longrightarrow \left(k \cdot (150+t)^{-1}\right)' = \frac{-\left(\frac{k}{150+t}\right)}{150+t} + 0'1$

$\frac{k'}{150+t} - \cancel{\left(k (150+t)^{-2}\right)} = \frac{-k}{(150+t)^2} + 0'1 \longrightarrow k = \int (15 + 0'1 t)\, dt = 15t + \frac{0'1 t^2}{2} + C$

$x(t) = \frac{15t + 0'05 t + C}{150+t} \longrightarrow q(0) = \frac{x(0)}{v(0)} \longrightarrow x(0) = 0'05 \cdot 300 = 15$

$15 = \frac{C}{150} \longrightarrow C = 2250 \longrightarrow x(t) = \frac{15t + 0'05t + 2250}{150+t}$ // ✓

c.) ✓

$v(t) = 2t + 300 \longrightarrow 500 = 2t + 300 \longrightarrow t = 100$

$x(100) = \frac{0'05 \cdot 100^2 + 15 \cdot 100 + 2250}{150+100} = 17 \longrightarrow q(100) = \frac{x(100)}{v(100)} = \frac{17}{500} = 0'034 = 3'4\%$ //

2.- De dos compuestos radiactivos A y B, con semividas respectivas $T_a = 4500$ y $T_b = 700$ millones de años, una cierta teoría cosmológica postula que en el momento de la formación del universo estaban en proporción $A/B = 1$. Actualmente, el compuesto ~~A~~ es 138 veces más frecuente que el compuesto ~~B~~ (al menos en el planeta tierra).

a) Utiliza estos datos para estimar la edad del universo.

b) Teorías más recientes postulan una edad del universo cercana a los 13800 millones de años. Si esto fuera correcto, ¿cuál sería la proporción inicial entre A/B?

Nota: 2'5 puntos

2'5

$$\frac{A(0)}{B(0)} = 1 \qquad A'(t) = -k_a A(t) \longrightarrow A(t) = A(0)\, e^{-k_a t}$$

$$B(t) = B(0)\, e^{-k_b t}$$

a)

$$\frac{A(t)}{B(t)} = \frac{A(0)\, e^{-k_a t}}{B(0)\, e^{-k_b t}} \qquad k_a = \frac{\ln 2}{4500} = 0'000154032 \text{ millones de años}^{-1}$$

$$k_b = \frac{\ln 2}{700} = 0'00099021 \quad ''$$

$$138 = \frac{A(0)\, e^{-k_a t}}{B(0)\, e^{-k_b t}} \longrightarrow 138 = e^{(-k_a + k_b)t} \longrightarrow \ln 138 = (-k_a + k_b)\, t$$

$$t = \frac{\ln 138}{(-k_a + k_b)} = 5892'6 \text{ millones de años}$$

b)

$$\cancel{13800 = \frac{\ln x}{(-k_a + k_b)} \longrightarrow \ln x = 11'54 \longrightarrow x = e^{11'54}} =$$

$$138 = \frac{A(0)}{B(0)} \cdot e^{(-k_a + k_b)\, 13800} \longrightarrow \frac{A(0)}{B(0)} = \frac{138}{e^{11'54}} = 0'001343$$

$= 1'34$ ‰

3.- En una reacción reversible $A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X$, suponer que $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$, y que las cantidades iniciales de cada producto son $A(0) = 5$, $B(0) = 2$, $X(0) = 1$.

a) Formula una ED que involucre sólo a $X(t)$ = cantidad de producto X tras t seg.

b) Calcula las cantidades de equilibrio A_{eq}, B_{eq}, X_{eq}, y esboza en una misma gráfica el aspecto de $A(t), B(t), X(t)$.

Nota: 2'5 puntos

2'5

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X \qquad k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \qquad A(0) = 5 \quad B(0) = 2 \quad x(0) = 1$$

a.)

$$x'(t) = k_1 A(t) B(t) - k_2 x(t)$$

$$A(0) - A(t) = x(t) - x(0) \rightarrow A(t) = A(0) - x(t) + x(0) \rightarrow A(t) = 6 - x(t)$$

$$B(0) - B(t) = x(t) - x(0) \rightarrow B(t) = B(0) - x(t) + x(0) \rightarrow B(t) = 3 - x(t)$$

$$x'(t) = k_1 (6 - x(t))(3 - x(t)) - k_2 x(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = k_1 (6-x)(3-x) - k_2 x$$

b.)

Busco $X_{eq} \rightarrow 0 = (6-x)(3-x) - 2x \rightarrow (18 - 6x - 3x + x^2) - 2x = 0$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2} \quad \begin{cases} \cancel{\frac{11+7}{2} = 9} \\ \frac{11-7}{2} = 2 \end{cases} \qquad X_{eq} = 2$$

$A_{eq} = 6 - X_{eq} = 4$

$B_{eq} = 3 - X_{eq} = 1$