9'6 | 3 | 2'4 | 3 | 1

Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología ~~Examen final, 10/6/2014~~

[redacted] - P ....

1.- Bajo ciertas condiciones fisiológicas la reacción enzimática ATP + AMP $\underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}}$ 2 ADP, tiene contantes $k_1 = 2$ y $k_2 = 1$. Si inicialmente mezclamos 2mM de ATP con 8mM de ADP (y nada de AMP).

a) Formula una ED para $X(t)$ = mM de AMP en la reacción tras t minutos.

b) Calcula las cantidades de equilibrio ATP_{eq}, AMP_{eq}, ADP_{eq}, y esboza en una misma gráfica la evolución de los reactivos.

c) Resuelve la ecuación diferencial $x' = 2(x-16)(x-2)$ y calcula $t_{0.50}$ y $t_{0.90}$.

Nota: 3 puntos

3

$X(t)$ = mN de AMP en la reacción tras t minutos

$Y(t)$ = mN de ATP " " " " " "

$Z(t)$ = mN de ADP " " " " " "

$X(0) = 0$ mN

$Y(0) = 2$ mN

$Z(0) = 8$ mN

a) $\boxed{X'(t) = K_2 Z(t)^2 - K_1 X(t) Y(t)}$

$X(0) - X(t) = \dfrac{Z(t) - Z(0)}{2}$ // $Z(t) = 2(X(0) - X(t)) + Z(0)$ // $Z(t) = 2(0 - X(t)) + 8$ //

$\boxed{Z(t) = 8 - 2X(t)}$

b) $Y(0) - Y(t) = \dfrac{Z(t) - Z(0)}{2}$ // $Y(t) = Y(0) - \dfrac{Z(t) - Z(0)}{2}$ // $Y(t) = 2 - \dfrac{Z(t) - 8}{2}$ //

$Y(t) = 2 - \dfrac{\cancel{8} - 2X(t) \cancel{- 8}}{2} = 2 + \dfrac{\cancel{2}X(t)}{\cancel{2}}$ // $\boxed{Y(t) = 2 + X(t)}$

$X'(t) = (8 - 2X(t))^2 - 2X(t)(2 + X(t)) = 4X(t)^2 - 32X(t) + 64 - 4X(t) - 2X(t)^2$ //

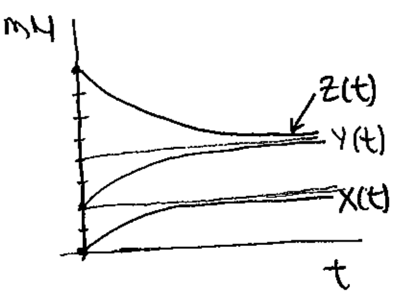
$\boxed{X'(t) = 2X(t)^2 - 36X(t) + 64}$

Busco x_{eq}

$2x_{eq}^2 - 36x_{eq} + 64 = 0$ // $2(x_{eq} - 16)(x_{eq} - 2) = 0$ → $x_{eq} = 2$ porque no puede saltar al otro eq.; → $x_{eq} = 16$

$\boxed{Y_{eq} = 2 + X_{eq} = 4}$ $\boxed{Z_{eq} = 8 - 2X_{eq} = 4}$

$ATP_{eq} = 4$ mN
$AMP_{eq} = 2$ mN
$ADP_{eq} = 4$ mN



c) $x' = 2(x-16)(x-2)$

$$\frac{dx}{dt} = 2(x-16)(x-2) \quad // \quad \int \frac{dx}{(x-16)(x-2)} = \int 2dt = 2t + c_1$$

$$\frac{1}{(x-16)(x-2)} = \frac{A}{(x-16)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$1 = A(x-2) + B(x-16)$$

$$\xrightarrow{x=16} 1 = 14A \quad // \quad A = 1/14$$

$$\xrightarrow{x=2} 1 = -14B \quad // \quad B = -1/14$$

$$\int \frac{dx}{(x-16)(x-2)} = \int \frac{1/14}{x-16}\,dx + \int \frac{-1/14}{x-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{14}\ln(x-16) - \frac{1}{14}\ln(x-2) =$$

$$= \frac{1}{14}\ln\frac{x-16}{x-2}$$

$$\frac{1}{14}\ln\frac{x-16}{x-2} = 2t + c_1$$

$$\xrightarrow{x(0)=0} \frac{1}{14}\ln\frac{-16}{-2} = c_1 \quad // \quad c_1 = \frac{\ln 8}{14}$$

$$\boxed{\frac{1}{14}\ln\frac{x-16}{x-2} = 2t + \frac{\ln 8}{14}}$$

V

t q. tarda en llegar al 50% del equilibrio:

Busco $t \,/\, x(t) = 1$

$$\frac{1}{14}\ln\frac{1-16}{1-2} = 2t + \frac{\ln 8}{14} \quad // \quad \frac{1}{14}\ln 15 = 2t + \frac{\ln 8}{14} \quad // \quad 2t = \frac{\ln 15}{14} - \frac{\ln 8}{14}$$

$$2t = \frac{0'629}{14} \quad // \quad \boxed{t = 0'0225 \text{ min} \simeq 1'35\,s}$$

V

t q. tarda en llegar al 90% del equilibrio:

Busco $t \,/\, x(t) = 0'9 \cdot 2 = 1'8$

$$\frac{1}{14}\ln\frac{1'8-16}{1'8-2} = 2t + \frac{\ln 8}{14} \quad // \quad \frac{1}{14}\ln\frac{-14'2}{-0'2} = 2t + \frac{\ln 8}{14} \quad // \quad \frac{1}{14}\ln 71 = 2t + \frac{\ln 8}{14} \quad //$$

$$2t = \frac{2'183}{14} \quad // \quad \boxed{t = 0'0780 \text{ min} \simeq 4'68\,s}$$

√

2.- En la cadena de desintegración radiactiva ^{117}Cd $\longrightarrow$ ^{117}In $\longrightarrow$ ... , las cantidades $x(t)$ e $y(t)$ de cadmio e indio, respectivamente, tras t horas cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) = -0'3\,x(t) \\ y'(t) = 0'3\,x(t) - y(t) \end{cases}$$

(a) Determina a partir de la ED las semividas respectivas del ^{117}Cd y del ^{117}In.

(b) Resuelve el sistema si inicialmente $x(0) = 1'4$ gr, $y(0) = 0$, y esboza la gráfica de las soluciones.

(c) ¿Cuándo es máxima la cantidad de ^{117}In, y qué valor alcanza? ¿Cuándo se igualan las cantidades de ^{117}Cd e ^{117}In?

(d) Si se añade de forma continuada 3 gr/hora de ^{117}Cd, ¿qué cantidad de cada sustancia habrá a largo plazo?

Nota: 3 puntos

2'6

$$0'3 = \frac{\ln 2}{T}$$

a) $T(^{117}Cd) = \dfrac{\ln 2}{0'3} \;/\!/\; \boxed{T(^{117}Cd) = 2'31}$ ✓

$T(^{117}In) = \dfrac{\ln 2}{1} \;/\!/\; \boxed{T(^{117}In) = \ln 2}$

b) $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -0'3 & 0 \\ 0'3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$

Autovalores de A

$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0'3-\lambda & 0 \\ 0'3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0'3 + 1'3\lambda + \lambda^2 = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = -0'3 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$ ✓

Autovectores

$\boxed{\lambda_1 = -0'3}$ Busco $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} / A\vec{p}_1 = \lambda_1 \vec{p}_1$

$\begin{pmatrix} -0'3 & 0 \\ 0'3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -0'3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow$ $\cancel{-0'3u = -0'3u}$

$0'3u - v = -0'3v \;/\!/$

$0'3u = 0'7v$

$u = \frac{7}{3}v$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 7/3\,v \\ v \end{pmatrix}$ $\downarrow v = 3$ $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ Busco $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} / A\vec{p}_2 = \lambda_2 \vec{p}_2$

$\begin{pmatrix} -0'3 & 0 \\ 0'3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow$ $\cancel{-0'3u = -u}$

$0'3u - v = -v \;/\!/\; 0'3u = 0 \;/\!/\; u = 0$

$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow[v=1]{} \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X(t) = c_1 \vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{p}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-0'3t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

$X(0) = \begin{pmatrix} 1'4 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\begin{matrix} 1'4 = 7c_1 \;/\!/\; c_1 = 0'2 \\ 0 = 3c_1 + c_2 \;/\!/\; c_2 = -0'6 \end{matrix}$

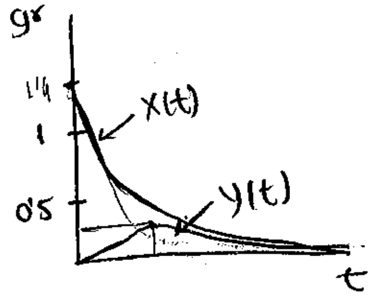
$$\mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0'2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-0'3t} - 0'6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$x(t) = 1'4\, e^{-0'3t}$

$y(t) = 0'6\, e^{-0'3t} - 0'6 e^{-t}$ ✓

$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$



c)

Calculo el máximo de $y(t)$

$y'(t) = 0'6 \cdot (-0'3)\, e^{-0'3t} - 0'6 \cdot (-1)\, e^{-t} = -0'18\, e^{-0'3t} + 0'6\, e^{-t}$

$y'(t) = 0 \rightarrow -0'18\, e^{-0'3t} + 0'6 e^{-t} = 0 \;\|\; 0'18 e^{-0'3t} = 0'6 e^{-t} \;\|\; \dfrac{e^{-0'3t}}{e^{-t}} = 10/3 \;\|$

$e^{0'7t} = 10/3 \;\|\; 0'7t = \ln \frac{10}{3} \;\|\; \boxed{t = 1'72 \text{ horas}} \simeq$ 1 hora 43 min 12 seg en alcanzar el máximo. ✓

$y'(t) = 0'3x(t) - y(t) \;\|\; 0 = 0'3x(t) - y(t) \;\|\; y(t) = 0'3x(t)$

en el máximo $y(t)$ va por debajo de $x(t)$ ✓

$y(1'72) = 0'6 e^{-0'3 \cdot 1'72} - 0'6 e^{-1'72} \;\|\; \boxed{y(1'72) = 0'25 g}$ cantidad máxima de ^{117}In

¿Cuando se igualan?

$x(t) = y(t) \rightarrow 1'4\, e^{-0'3t} = 0'6 e^{-0'3t} - 0'6 e^{-t} \;\|$

$1'4 e^{-0'3t} - 0'6\, e^{-0'3t} = -0'6 e^{-t} \;\|\; 0'8\, e^{-0'3t} = -0'6 e^{-t} \;\|$ ✓

$-\dfrac{4}{3} = \dfrac{e^{-t}}{e^{-0'3t}} = e^{-0'7t}$ No tiene solución $\Rightarrow$ No se igualan nunca la cantidades de ambos

No puedo sacar el logaritmo de un número negativo

Si se añade de forma continuada 3gr/hora de ^{117}Cd

$x'(t) = -0'3x(t) + 0'3$ → Busco x_{eq} → $0 = -0'3x_{eq} + 0'3 \rightarrow \boxed{x_{eq} = 1 \text{ gr}}$

$y'(t) = 0'3x(t) - y(t) + \cancel{0'3 \cdot 0'3} = 0'3x(t) - y(t) + 0'09$

mal

Busco y_{eq}

$0 = 0'3x_{eq} - y_{eq} + 0'09 \;\|\; 0 = 0'3 - y_{eq} + 0'09 \;\|\; \boxed{y_{eq} = 0'39 \text{ gr}}$

Nombre y dni: ....3.......

3.- En un circuito LCR, la diferencia de potencial en el condensador $V(t)$ cumple la ecuación diferencial

$$V''(t) + 2V'(t) + 122V(t) = 0.$$

Si inicialmente $V(0) = 220$, y al cabo de $\frac{\pi}{2}$ segundos se tiene $V(\frac{\pi}{2}) = -220e^{-\pi/2}$.

a) Resuelve la ecuación diferencial.

b) Esboza la gráfica de la solución y determina cuándo se alcanza por primera vez $V(t) = 0$.

c) En la ED, el valor 122 corresponde a la conductividad del circuito. ¿Qué conductividad deberíamos tener para que la frecuencia de oscilación sea 5?

Nota: 3 puntos

a) $\lambda^2+2\lambda+122=0 \longrightarrow \lambda = \dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot122}}{2\cdot1} = \dfrac{-2\pm\sqrt{-484}}{2} =$

$= \dfrac{-2\pm22\sqrt{-1}}{2} = -1\pm11i$ ✓

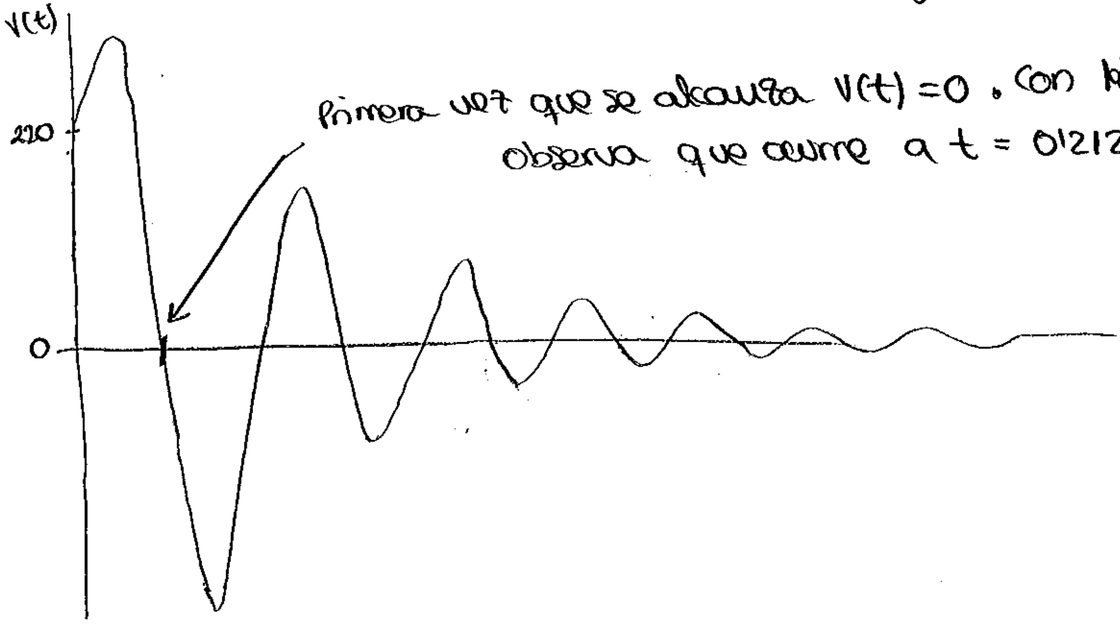
$V(t) = c_1 e^{-t}\cos(11t) + c_2 e^{-t}\,\text{sen}(11t)$ ✓

$\Rightarrow \boxed{V(t) = 220e^{-t}\cos(11t) + 220e^{-t}\,\text{sen}(11t)}$

$\xrightarrow{V(0)=220}$ $220 = c_1$

$\xrightarrow{V(\frac{\pi}{2})=-220e^{-\pi/2}}$ $-220e^{-\pi/2} = -c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \rightarrow c_2 = 220$

✓

b) 

Primera vez que se alcanza $V(t)=0$. Con Maxima se observa que ocurre a $t = 0'2123$ s c)

$$\lambda^2 + 2\lambda + x = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot x}}{2}$$

Para q. la frecuencia de oscilación sea 5, la solución debe ser $-1 \pm 5i$. Y para ello el interior de la raiz tiene que ser -100, para que 100 salga fuera de la raiz como 10 y al dividirlo por 2 quede 5.

$2^2 - 4x = -100$ // $104 = 4x$ // $x = 26$

La conductividad debería ser 26.

Nombre y dni: 1

4.- El siguiente sistema de ED no lineales aparece cuando se estudia el movimiento planetario entorno al sol:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = (1-x)/x^3 \end{cases}$$

donde sólo interesan las soluciones con $x(t) > 0$ (y $v(t)$ puede ser positivo o negativo).

(a) Calcula el punto de equilibrio del sistema y esboza el plano de fases. ¿Podemos garantizar que el equilibrio es estable?

(b) Utiliza el ordenador (plotdf) para comprobar si este modelo tiene soluciones periódicas (usa datos iniciales de la forma $x(0) = 1$, $v(0) = a$ para algunos valores de $0 \leq a \leq 1$).

Nota: 1 punto

Paso 1. Puntos de eq.

Busco x_{eq}, v_{eq} / $v = 0$, $\frac{1-x}{x^3} = 0$

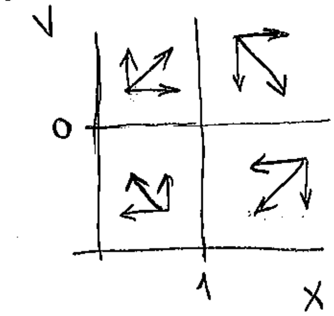
Sol: $v_{eq} = 0$, $x_{eq} = 1$ Punto de equilibrio

✓

Paso 2. Plano de fases

	$v>0$	$v<0$
signo (x')	+	−

	$x>1$	$x<1$
signo(v')	−	+



$x' = F(x,v) = v$

$v' = G(x,v) = (1-x)/x^3$

Matriz derivada

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2x-3}{x^4} & 0 \end{pmatrix} \underset{x=1}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

Autovalores de D

$$|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$ ✓

Puesto que los autovalores de D son números complejos, no sabemos como es el equilibrio, estamos en el caso de duda.

b) Con plotdf podemos comprobar que este modelo tiene soluciones periódicas, dicando en valores cercanos a $x=1$ y $v=0$.

Algo parecido