

Nombre: \_\_\_\_\_

10

1.- En el proceso de descomposición del peróxido de hidrógeno  $H_2O_2$ , la concentración  $P(t)$  de este compuesto tras  $t$  segundos cumple la ED

$$P'(t) = -r P(t)^2,$$

para una cierta constante  $r > 0$ . Si inicialmente la concentración es del 75%, y al cabo de 6 segundos baja al 50%,

a) Encuentra una expresión para  $P(t)$  y determina el valor de  $r$ .

b) ¿Qué concentración habrá al cabo de 12 segundos? ¿Cuánto tiempo llevará rebajar la concentración al 25%?  $P(t)$  = concentración de P tras t segundos

$$\textcircled{a} \quad \frac{dP}{dt} = -r P^2 \rightarrow \int \frac{dP}{P^2} = -r \int dt$$

$$-\frac{1}{P} = -rt + c \rightarrow P = \frac{1}{rt - c}$$

$$P(0) = 0.75 \quad 0.75 = \frac{1}{r \cdot 0 - c} \Rightarrow c = \frac{-1}{0.75} = -\frac{4}{3}$$

$$P(6) = 0.5 \quad 0.5 = \frac{1}{6r + \frac{4}{3}} \Rightarrow 0.5(6r + \frac{4}{3}) = 1$$

$$3r + \frac{2}{3} = 1$$

$$3r = 1 - \frac{2}{3}$$

$$r = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{9}}$$

✓

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{\frac{1}{9}t + \frac{4}{3}}}$$

$$\textcircled{b} \quad P(12) = \frac{1}{\frac{12}{9} + \frac{4}{3}} = 0.375 \quad \boxed{\text{ER } 37.5\%}$$

$$0.25 = \frac{1}{\frac{t}{9} + \frac{4}{3}}, \quad \frac{1}{4} \left( \frac{t}{9} + \frac{4}{3} \right) = 1, \quad \frac{t}{36} + \frac{4}{12} = 1$$

$$\frac{t}{36} = 1 - \frac{4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad \checkmark$$

$$\frac{t}{36} = \frac{2}{12}$$

$$t = \frac{36 \cdot 2}{12} = \boxed{24 \text{ segundos}}$$

Nom

10

1.- Tenemos una boya submarina de material elástico y rellena de un cierto gas. Su volumen  $V$  depende de la profundidad en que está situada, y por tanto de la presión  $P$ , según la ecuación diferencial

$$\frac{dV}{dP} = -r \frac{V}{P},$$

para una cierta constante  $r > 0$ . Sabemos que a presión 1 atm el volumen de la boya es de 10 litros, y a presión 5 atm, éste baja a 5 litros.

a) Encuentra una expresión para  $V$  en función de  $P$ , y determina el valor de  $r$ .

b) ¿Cuál es el volumen a presión 10 atm? ¿Qué presión máxima podría soportar si al alcanzar el volumen de 3 litros la boya se rompe?

1)  $\frac{dV}{dP} = -r \frac{V}{P} \quad r > 0 \rightarrow V(P)$

$V(1) = 10L$

$V(5) = 5L$

a)  $\frac{dV}{V} = -r \frac{dP}{P} \rightarrow \int \frac{dV}{V} = -r \int \frac{dP}{P}$

$\ln(V) = -r \cdot \ln(P) + C$

$\ln(10) = -r \cdot \ln(1) + C$

$\ln(10) = C \rightarrow \boxed{C = \ln(10) = 2.3}$

$\ln(5) = -r \cdot \ln(5) + \ln(10)$

~~$\ln(5) = \ln(2) \rightarrow r = \ln\left(\frac{2}{5}\right) =$~~

~~$\ln(5) - \ln(10) = -\ln(5) \cdot r$~~

$\boxed{r = 0.431}$

$r = \frac{-\ln(0.5)}{\ln(5)}$

~~$r = 0.431 \text{ atm}$~~

$\ln(V) = -0.431 \cdot \ln(P) + \ln(10)$

$e^{\ln(V)} = e^{\ln(P)^{-r} + \ln(10)}$

~~$e^{\ln(V)} = e^{\ln(P)^{-r}} \cdot e^{\ln(10)}$~~

$V = P^{-r} \cdot 10 \rightarrow \boxed{V(P) = 10 \cdot P^{-0.431}}$

→ comprobación:

$V(1) = 10 \cdot 1^{-0.431} = 10L$

$V(5) = 10 \cdot 0.5 = 5L$

b)  $V(10) = 10 \cdot 10^{-0.431} = \boxed{3.71 L}$

$V(P) = 3L \rightarrow 3 = 10 \cdot P^{-0.431}$

$0.3 = P^{-0.431}$

$\ln(0.3) = -0.431 \cdot \ln(P)$

$\ln(P) = 2.795 \rightarrow \del{P = 16.37}$

$\boxed{P = 16.37 \text{ atm}}$