Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología **Test 2, 17/2/2014** 10

Nombre: ....

En cierta reacción química los moles de producto $x(t)$ tras t segundos evolucionan según la ED

$$x'(t) = k\,x(t)\,\big(12 - x(t)\big)$$

donde $k > 0$ es una constante.

(a) Determina la cantidad de producto a largo plazo, y esboza la gráfica de $x(t)$ para los datos iniciales $x(0) = 2$ y $x(0) = 14$ (en este apartado no es necesario resolver la ED).

(b) Si empezamos con 2 moles de producto, y al cabo de 3 segundos se alcanzan 6 moles, ¿cuántos moles habrá tras 6 segundos de reacción? ¿Qué valor tiene k?

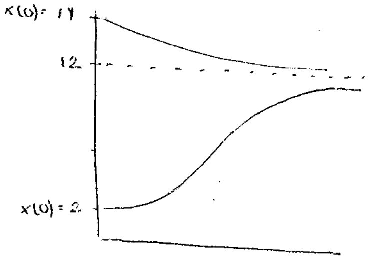
(c) Si la reacción fuera reversible, la ecuación quedaría de la forma

$$x'(t) = k\,x(t)\,\big(12 - x(t)\big) - h\,x(t)^2.$$

Determina el valor de h si observamos que a largo plazo sólo se forman 8 moles de producto.

a) A largo plazo → $t = \infty$ $\quad x(0) = 2 \quad x(0) = 14$

$x'(t) = K\cdot x(12-x) \rightarrow 0 = K\cdot x(12-x) = \cancel{Kx12x - x^2}$ → $x = 0$ moles si $x(0) = 0$; → $x = 12$ moles si $x(0) \neq 0$



b) $x(0) = 2 \quad x(3) = 6 \quad x(6) = ? \quad K?$

$$\frac{dx}{dt} = K\cdot x(12-x) \longrightarrow \int \frac{1}{x(12-x)}\,dx = \int K\,dt \quad *$$

$$\frac{1}{x(12-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{12-x} \longrightarrow 1 = A(12-x) + Bx \begin{cases} x = 0 \rightarrow A = 1/12 \\ x = 12 \rightarrow B = 1/12 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x(12-x)} = \int \frac{1}{12x} + \int \frac{1/12}{12-x} = \frac{1}{12}\cdot \ln x - \frac{1}{12}\cdot \ln(12-x)$$

$$* \quad \frac{1}{12}\cdot\big(\ln x - \ln(12-x)\big) = K\cdot t + c$$

$$x(0) = 2 \longrightarrow \frac{1}{12}(\ln 2 - \ln 10) = c = \frac{1}{12}\cdot \ln\frac{2}{10} = \frac{\ln 1/5}{12} = -0'134$$

$$x(3) = 6 \longrightarrow \frac{1}{12}(\cancel{\ln 6} - \ln 6) = K\cdot 3 - 0'134 \longrightarrow \boxed{K = \frac{0'134}{3} = +0'0447}$$

$$\frac{1}{12}\left(\ln x - \ln(12-x)\right) = 0'0447\,t - 0'134$$

$$t=6 \to x? \Rightarrow \ln x - \ln(12-x) = 12(0'0447\cdot 6 - 0'134) \to$$

$$\ln\frac{x}{12-x} = 12(0'0447\cdot 6 - 0'134) \to \frac{x}{12-x} = \exp(\underbrace{12(0'0447\cdot 6 - 0'134)}_{1'6104})$$

$$x = (12-x)\,e^{1'6104} \longrightarrow x = 12e^{1'6104} - x\cdot e^{1'6104} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x + x\cdot e^{1'6104} = 12\cdot e^{1'6104} \longrightarrow x(1+e^{1'6104}) = 12\cdot e^{1'6104} \to$$

$$x = \frac{12\cdot e^{1'6104}}{1+e^{1'6104}} = \boxed{10 \text{ moles}}$$

c) $x'(t) = k\cdot x(t)\cdot(12-x(t)) - \cancel{s}\, h\cdot x(t)^2 \qquad k = 0'0447$

$$x'(t) = k\cdot x\,(12-x) - h\cdot x^2$$

~~si x'(t~~ si $x'=0 \longrightarrow x=8 \Rightarrow 0 = 0'0447\cdot 8(12-8) - h\cdot 8^2 \to$

$$\to 0 = 0'0447\cdot 32 - h\cdot 64 \to \boxed{h} = \frac{0'0447\cdot 32}{64} = \boxed{0'02235}$$

Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología **Test 2, 17/2/2014** 10

Nombre: ....

Para ciertos patógenos, la densidad de individuos $x(t)$ (en miles/ml) tras t horas cumple la ED

$$x'(t) = r\,(6 - x(t))\,(x(t) - 1)$$

donde $r > 0$ es una constante.

(a) Determina la densidad de patógenos a largo plazo, y esboza la gráfica de $x(t)$ para los datos iniciales $x(0) = 2$ y $x(0) = 0'5$ (en este apartado no es necesario resolver la ED).

(b) Si inicialmente $x(0) = 2$, y al cabo de 6 horas la densidad sube a 3'5 , ¿qué densidad habrá tras 12 horas? ¿Qué valor tiene k?

(c) La acción de un medicamento produciría una ecuación de la forma

$$x'(t) = r\,(6 - x(t))\,(x(t) - 1) - \gamma\, x(t).$$

Determina el valor de γ para que la densidad de patógeno a largo plazo sea 2.

a) Densidad a largo plazo

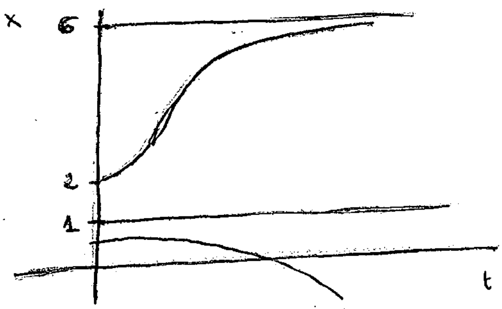
$x'(t) = r(6-x(t))(x(t)-1)$

$0 = r(6-x_{eq})(x_{eq}-1)$ $\nearrow x_{eq} = 6$ $\searrow x_{eq} = 1$

• Esbozar gráfica para:

$x(0) = 2$ ⊕ Crece

$x(0) = 0'5$ ⊖ Decrece



b) $x(0) = 2 \rightarrow$ Cuando $t = 0$ $x = 2$

$x(6) = 3'5 \rightarrow$ Cuando $t = 6$ $x = 3'5$

Calcular x cuando $t = 12$, ¿valor de K?

$x'(t) = r(6-x(t))(x(t)-1)$

$\frac{dx}{dt} = r(6-x)(x-1)$; $\int \frac{dx}{(6-x)(x-1)} = \int r\,dt = rt + C_1$

$\int \frac{dx}{(6-x)(x-1)} = \int \left(\frac{A}{6-x} + \frac{B}{x-1}\right)dx = -\frac{1}{5}\ln(6-x) + \frac{1}{5}\ln(x-1) = \frac{1}{5}\ln\frac{x-1}{6-x}$

$A(x-1) + B(6-x) = 1$

$x = 1 \rightarrow 5B = 1$; $B = \frac{1}{5}$

$x = 6 \rightarrow 5A = 1$; $A = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}\ln\frac{x-1}{6-x} = rt + C_1$

$x(0) = 2 \rightarrow \frac{1}{5}\ln\frac{1}{4} = C_1$

$x(6) = 3'5 \rightarrow \frac{1}{5}\ln\frac{2'5}{2'5} = r\cdot 6 + \frac{1}{5}\ln\frac{1}{4}$; $0 = 6r + \frac{1}{5}\ln\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{5}\ln\frac{1}{4} = 6r$; $r = -\frac{1}{30}\ln\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}\ln\frac{x-1}{6-x} = -\frac{1}{30}\ln\frac{1}{4}t + \frac{1}{5}\ln\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}\ln\frac{x-1}{6-x} = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{4}t + \ln\frac{1}{4}\right)$

$e^{\ln\frac{x-1}{6-x}} = e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}\cdot e^{\ln\frac{1}{4}}$; $\frac{x-1}{6-x} = e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}\cdot\frac{1}{4}$

$4x-4 = e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}(6-x)$; $4x-4 = e^{-1/6\ln\frac{1}{4}\cdot t}\cdot 6 - xe^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}$

$4x + xe^{-1/6\ln\frac{1}{4}t} = e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}\cdot 6 + 4$; $x\left(4+e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}\right) = 6e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t} + 4$

$$x(t) = \frac{6e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t} + 4}{4 + e^{-1/6\ln\frac{1}{4}t}}$$

Densidad tras 12 horas. Busco x cuando $t=12$

$$x(t) = \frac{6e^{-1/6\ln(\frac{1}{4})\cdot 12} + 4}{4 + e^{-1/6\ln(\frac{1}{4})\cdot 12}} = \frac{100}{20} = 5$$

√

c) $x'(t) = r(6-x(t))(x(t)-1) - \gamma x(t)$ → Determinar γ para que densidad $=2$ a largo plazo

$0 = r(6-x_{eq})(x_{eq}-1) - \gamma x_{eq}$

$0 = r(6-2)(2-1) - \gamma\cdot 2$; $2\gamma = 4r$; $\gamma = \frac{4r}{2} = 2r = -2\frac{1}{30}\ln\frac{1}{4} = 0'09242 \simeq 0'09$