

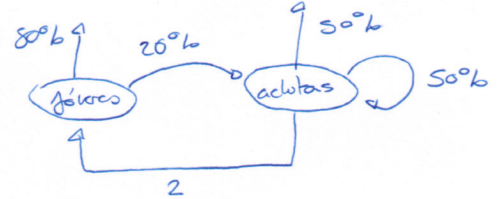
10

En una zona protegida se observa que la población anual de hembras de pato malvasía, dividida en jóvenes (menores de 1 año) y adultas, sigue un SD con matriz de transición $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

- Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz.
- Determina aproximadamente en qué porcentaje crece o decrece la población cada año.
- Determina la proporción aproximada de aves jóvenes y adultas a largo plazo.
- ¿Qué fecundidad media deberían tener las aves adultas para que la población creciera un 5% al año?

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A_{n+1} = 2B_n \rightarrow A_n \text{ (Adultas)} \\ B_{n+1} = 0.2A_n + 0.5B_n \Rightarrow B_n \text{ (Adultas)} \end{cases}$$



Pato malvasía	Mortalidad	Fecundidad
Jóvenes	80%	0
Adultas	50%	2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Fecundidad} \\ \rightarrow \text{Lo que sigue vivas. (1 - mortalidad)} \end{matrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 0.2 & 0.5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.5\lambda - 0.4$$

$$\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 + 1.6}}{2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{1.85}}{2} = \frac{0.5 + \sqrt{1.85}}{2} = 0.93 = \lambda_1$$

$$\lambda_2 = \frac{0.5 - \sqrt{1.85}}{2} = -0.43 = \lambda_2$$

$\lambda_1 = 0.93, \lambda_2 = -0.43$
dominante

Como $\lambda_1 = 0.93$ es el autovector dominante lo que ocurre es que la población disminuirá un 7% cada año hasta extinguirse.

c) Autovector:

$$\lambda_1 = 0.93 \Rightarrow \text{Busco } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} / A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v = 0.93u \rightarrow v = 0.465u \\ 0.2u + 0.5v = 0.93v \end{cases} \quad u = t \quad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0.465t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 465 \end{pmatrix}$$

Proporción a largo plazo

$$\begin{cases} A \Rightarrow \frac{1000}{1465} \approx 0.68 \Rightarrow 68\% \text{ Jóvenes} \\ B \Rightarrow \frac{465}{1465} \approx 0.32 \Rightarrow 32\% \text{ Adultas} \end{cases}$$

d) Busco (F) fecundidad de las patas adultas / $\lambda_1 = 1.05$ (que la población crezca un 5%).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & F \\ 0.2 & 0.5 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1.05 & F \\ 0.2 & -0.55 \end{vmatrix} = 0.15775 - 0.2F = 0$$

$$\lambda = 1.05 \quad 0.2F = 0.15775 \quad F = \frac{0.15775}{0.2} \approx 2.89$$

Para que la población crezca un 5% al año la fecundidad media tendría que ser de 2.89 crías/pato.