

Un modelo simplificado para dos especies de levadura que compiten por alimento establece que las poblaciones  $x(t)$  e  $y(t)$  de cada especie tras  $t$  días cumplen

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

- a) Resolver la ecuación diferencial si  $x(0) = 100$ ,  $y(0) = 200$ .  
 b) Esboza la gráfica de la solución, y determina si alguna de las especies se extingue y cuándo ocurre esto.

a)  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$   $\vec{x}(t) = c_1 \vec{p}_1 e^{d_1 t} + c_2 \vec{p}_2 e^{d_2 t}$

Busca autovalores  $|A - dI| = \begin{vmatrix} 2-d & -1 \\ -1 & 2-d \end{vmatrix} = (2-d)^2 - 1 = 0$   
 $4 - 4d + d^2 - 1 = 0 \Rightarrow d^2 - 4d + 3 = 0$   
 $d = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 1 \end{cases}$

$d = 3 \rightarrow$  Busca  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} / A\vec{p}_1 = 3\vec{p}_1$   
 $2u - v = 3u \Rightarrow -v = u \Rightarrow \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = 1 \rightarrow$  Busca  $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} / A\vec{p}_2 = \vec{p}_2$   
 $2u - v = u \Rightarrow u = v \Rightarrow \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

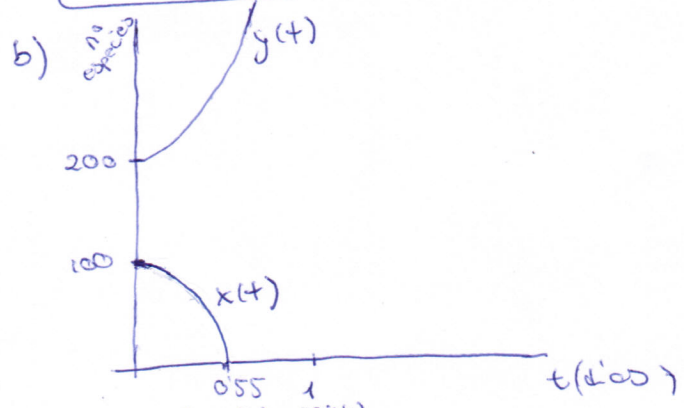
$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$

$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 100 = -c_1 + c_2 \\ 200 = c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 150 \\ c_1 = 50 \end{cases}$

$x(t) = -50 \cdot e^{3t} + 150 \cdot e^t$   
 $y(t) = 50 \cdot e^{3t} + 150 \cdot e^t$

- $y(t)$  crece rápidamente ✓
- Se extingue  $x(t) \rightarrow$  Busca  $t / 150 \cdot e^t = 50 \cdot e^{3t} \Rightarrow x(t) = 0$  ✓  
 $3 = e^{2t} \Rightarrow \ln 3 = 2t \Rightarrow t = \boxed{0.55 \text{ días}} \Rightarrow \boxed{13.18 \text{ h}}$



Busca máximo  $\rightarrow$  Busca  $t / x'(t) = 0$   
 $-150 \cdot e^{3t} + 150 \cdot e^t = 0$   
 $e^{3t} = e^t$   
 $e^{2t} = 1$   
 $2t = \ln 1$   
 $t = 0 \rightarrow x(t)$  no tiene máximo

no pide esto