ECUACIONES DIFERENCIALES $\quad$ 1º de grado en Biotecnología

TEMA 1: Ecuaciones de primer orden

1. Una población de bacterias crece según la ley de Malthus. Si inicialmente hay mil individuos y observamos que se duplica cada 6 horas, ¿cuántos habrá al cabo de t horas? ¿En qué porcentaje crece la población cada hora? ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

2. De cierto material radioactivo se sabe que se desintegra un 20% cada año. ¿Qué porcentaje del material inicial quedará al cabo de 2 años? ¿Cuántos años tardará en desintegrarse un 80% del material inicial?

3. El C_{14} tiene una semivida de 5730 años. En una reciente excavación se ha hallado un hueso fosilizado cuyo contenido en C_{14} es de sólo un 12% respecto a la cantidad que se encuentra en un hueso similar de un ser vivo. Determina la edad del fósil.

4. El Yodo 131 es radiactivo y tiene una semivida de 8 días. En una prueba médica un paciente ingiere una dosis inicial de ^{131}I que emite 100 milicuries (mCi), y que se acumula de forma natural en su tiroides. ¿Qué emisión de ^{131}I producirá el paciente al cabo de una semana? ¿Cuándo estarán las emisiones por debajo de 5 mCi?

5. La densidad de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye con la altura según la ecuación diferencial
$$D'(h) = -c\,D(h),$$
donde $c > 0$ es una constante que depende del gas.

   a) Para el oxígeno, la densidad disminuye un 7% por kilómetro. ¿Cuál es valor de c? ¿A qué altura la densidad de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar?

   b) Responder a la misma pregunta para el hidrógeno, suponiendo que disminuye sólo un 0'6% por km.

   c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400.000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habría más hidrógeno que oxígeno?

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales
$$(a)\ \frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2} \quad \text{con } x(0) = 1 \qquad\qquad (b)\ \frac{dx}{dt} + 3t^2x^2 = 0 \quad \text{con } x(1) = 1/2$$
$$(c)\ \frac{dx}{dt} = (1+\cos t)(10x - x^2) \quad \text{con } x(0) = 1 \qquad\qquad (d)\ \frac{dx}{dt} = -x^2 + 4 \quad \text{con } x(0) = 1$$

7. Un recipiente inicialmente contiene 1 litro de argón a una presión de 4 atmósferas. Al comprimirlo lentamente la relación entre volumen V y presión P cumple la ecuación diferencial $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{5P}{3V}$.

   a) Calcula P como función de V.

   b) ¿Cuál es la presión cuando el volumen es 1/2 litro?

   c) ¿Hasta qué volumen debemos comprimirlo para que la presión sea de 25 atmósferas?

8. En una reacción química de orden 2, digamos $\mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow{k} \mathrm{P}$, la cantidad de reactivo A tras t segundos (en moles) cumple la ecuación diferencial
$$A'(t) \;=\; -2k\,A(t)^2,$$
donde $k > 0$ es la cte de velocidad de la reacción.

   a) Resuelve está ecuación diferencial si $k = 0'5$ y $A(0) = 1$ mol.

   b) Determina cuándo se habrá transformado el 90% del reactivo A.

   c) Determina los moles de producto $P(t)$ tras t seg, y dibuja las gráficas de $A(t)$ y $P(t)$.

9. Una reacción química de orden 3, $\mathrm{A} + \mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow{k} \mathrm{P}$, cumple la ecuación diferencial
$$A'(t) \;=\; -3k\,A(t)^3,$$

   a) Resuelve está ecuación diferencial si $k = 0'5$ y $A(0) = 1$ mol, dibujando la gráfica de la solución.

   b) ¿Cuándo se habrá transformado el 90% del reactivo A? ¿Es más lenta o más rápida que la de orden 2?

10. La evolución de una población de bacterias (en millones) viene dada por la ecuación
$$\frac{dx}{dt} = 0'2x(5 - x),$$
con $t =$ tiempo en horas. Si inicialmente hay un millón de bacterias:

    a) Resuelve la ED y calcula el número de bacterias tras 1 y 3 horas.

    b) ¿Cuántas bacterias habrá a largo plazo? ¿En qué momento se alcanzará el 90% de la población máxima?

11. En un modelo simple de evolución de epidemias, la proporción $I(t)$ de individuos portadores de la enfermedad crece según la ecuación diferencial

$$I'(t) = \alpha\, I(t)\, S(t), \quad (t \text{ en días})$$

donde $\alpha > 0$ es la tasa de contagio, y $S(t) = 1 - I(t)$ es la proporción de individuos sanos (no portadores). Suponer que inicialmente $I(0) = 0'01 = 1\%$, y que al cabo de un mes sube hasta el 20%.

a) Hallar $I(t)$ y α. Representa conjuntamente las gráficas de $I(t)$ y $S(t)$.

b) ¿Quién será I al cabo de 2 meses? ¿Cuándo será $I(t) = S(t)$?

c) Suponer que con medidas de higiene podemos reducir el valor de α a la mitad. Calcula $I(t)$ en este caso y explica las diferencias con el caso anterior.

12. Si en el ejercicio anterior tenemos en cuenta una tasa de mortalidad β en la población I, la ED quedaría

$$I'(t) = \alpha\, I(t)\,\big(1 - I(t)\big) \; - \; \beta I(t).$$

Suponer que $\beta = 0'015$, y responder a lo siguiente **sin resolver la ED**.

a) Con α del ejercicio anterior, ¿qué porcentaje de población sería portadora de la enfermedad a largo plazo?

b) ¿Quién tendría que ser α para que a largo plazo el porcentaje de población portadora sea inferior al 10%?

13. La velocidad (en m/seg) de un cuerpo en caída libre viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - R\, v^2$$

donde $g = 9'8$ y R =coeficiente de rozamiento del cuerpo con el aire. Suponer que un hombre con el paracaídas cerrado tiene $R = 0'001$, y abierto $R = 0'5$.

a) **Sin resolver la ecuación**, calcula la velocidad máxima que alcanzaría el cuerpo en cada caso, y esboza la gráfica de $v(t)$.

b) En el caso del paracaídas cerrado, ¿cuánto tiempo pasa desde que se tira del avión hasta que alcanza la velocidad de 100 m/s? ¿Y en el caso del paracaídas abierto?

14. En una reacción química reversible A $\underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}}$ X, las concentraciones de A y X tras t seg cumplen

$$A'(t) = -k_1 A(t) \, + \, k_2 X(t).$$

Suponer que inicialmente hay sólo 1 mol de A, de modo que $X(t) = 1 - A(t)$

(a) Hallar la concentración de equilibrio del reactivo A (en términos de las ctes k_1, k_2).

(b) Si se observa que A_{eq} =0'25 moles. ¿Qué relación debe haber entre k_1 y k_2? ¿Qué dirección va más rápida?

(c) Resuelve la ED, y determina k_1, k_2 si se observa que las concentraciones de A y X se igualan tras 15 seg.

15. Se está estudiando una especie de cabra montesa. Inicialmente se cuenta con 500 ejemplares, y se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales la población crece un 6% cada año. Para evitar un desequilibrio ecológico en la zona se consideran dos planes.

(a) Plan A: permitir la caza de 10 ejemplares de cabra al final de cada año.

(b) Plan B: permitir que se cace un 2% de la población total de cabras al final de cada año.

Calcular cuál sería la población aproximada al cabo de 15 años con cada uno de los planes.

16. Un paciente hospitalizado recibe mediante un gotero 200 miligramos diarios de cierto medicamento. Se sabe que cada día el cuerpo elimina de manera natural una quinta parte del medicamento en la sangre.

a) Plantear una ED para $x(t)$ = mgr de medicamento en la sangre tras t días. A largo plazo, ¿qué cantidad de medicamento habrá en el organismo?

b) Resuelve la ED, y determina cuándo se alcanza el 95% de la cantidad máxima.

c) ¿Qué dosis diaria habría que aplicar si a largo plazo queremos 1500 mgr de medicamento en la sangre?

17. Un depósito contiene inicialmente 1000 litros de agua salada, con concentración $0'5$ gr/l. Introducimos desde un grifo externo 20 litros/min de una solución salina con 4 gramos de sal por litro, y dejamos salir por un sumidero otros 20 litros por minuto de la mezcla que se forma.

a) Escribe una ED para $x(t)$ = gr NaCl en el depósito tras t minutos. ¿Qué cantidad de sal habrá en el depósito a largo plazo?

b) Escribe una ED para $q(t)$ = concentración de NaCl en el depósito (en gr/l) tras t minutos. ¿Qué concentración habrá a largo plazo?

c) Resuelve la ED de (b) y determina cuándo se alcanzará una concentración de 3'5 gr/litro.

18. En condiciones normales, el hígado contiene aproximadamente 400 ml de sangre, y en él entra (por las arterias) y sale (por las venas) un flujo continuo de sangre a un ritmo de 15 ml/min. Suponer que la sangre entrante tiene una concentración de medicamento de 3 mgr/ml.

    (a) Formula una ecuación diferencial para $x(t) =$ mgr de medicamento en el hígado tras t min, determina los mgr de medicamento en el hígado a largo plazo y esboza la gráfica de $x(t)$.

    (b) Suponer que el hígado es capaz de retener el 60% del medicamento de la sangre, de modo que sólo el 40 % restante sale por las venas. ¿Cómo quedaría la ecuación diferencial en este caso? ¿Qué concentración de medicamento habría en el hígado a largo plazo?

19. Experimentalmente se ha llegado a la siguiente *ley de disolución*: la velocidad a la que una cierta cantidad de soluto $C(t)$ se disuelve en un solvente es proporcional al producto de (a) la cantidad de soluto que queda aún por disolver; y (b) la diferencia entre la concentración de saturación del solvente Q_{sat} y la concentración de soluto en tiempo t.

    a) Formula una ED para $C(t) =$ cantidad de soluto que queda por disolver tras t minutos.

    b) Se desea probar un medicamento para disolver el colesterol. Se vierte un coágulo con 8 mgr de colesterol en 60 ml de disolvente, cuya concentración de saturación es de 0'15 mgr/ml. Se observa que al cabo de 40 min se disuelve la mitad del colesterol. ¿Cuándo se habrá disuelto el 75% del colesterol? ¿Qué cantidad de colesterol quedará en el coágulo al cabo de 4 horas?

20. Se cree que el crecimiento de un tumor puede responder a una de las dos leyes siguientes:

    (i) $V' = kV(1 - \frac{V}{M})$ (crecimiento logístico)

    (ii) $V' = kV \ln(\frac{M}{V})$ (crecimiento de Gompertz),

    donde $V(t)$ representa el volumen de células tumorales tras t días.

    (a) Resuelve ambas EDs, suponiendo que inicialmente $V(0) = 0'1$.

    (b) En el caso $M = 1$ y $k = 0'2$, esboza la gráfica de las soluciones. Si experimentalmente se observa que tras 2 semanas el tumor alcanza aprox el 90% de su tamaño máximo, ¿cuál de los dos modelos se ajusta mejor?

    (c) Utiliza el ordenador para dibujar las derivadas de las soluciones, y determina qué modelo crece más rápido al inicio, y en qué momento se alcanza la velocidad máxima de crecimiento.

21. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

    a) $x'(t) = x(t) + 2te^{2t}$ con $x(0) = 1$ *b)* $x'(t) + x(t) = te^{-t} + 1$

    c) $tx'(t) + 2x(t) = \sin t$ con $x(\frac{\pi}{2}) = 0$ *d)* $x'(t) = -\frac{3}{t}x(t) + \sqrt{t}$

22. Un depósito de 500 m^3 de capacidad contiene 100 m^3 de agua pura. A partir del instante $t = 0$ entra en el depósito una disolución de alcohol en agua al 50% a razón de 2 m^3 por minuto, y sale la disolución, supuesta homogénea, a razón de 1 m^3 por minuto.

    (a) Determinar el volumen de la disolución en tiempo t. ¿Cuándo se llenará el depósito?

    (b) Determinar la cantidad de alcohol en el depósito en tiempo t. ¿Qué concentración tendrá la disolución cuando se llene el depósito?

23. Las cantidades de isótopos U y V en una serie radiactiva $\mathrm{U} \xrightarrow{k_1} \mathrm{V} \xrightarrow{k_2} \cdots$, cumplen las EDs

    $$U'(t) = -k_1 U(t), \quad V'(t) = k_1 U(t) - k_2 V(t), \quad \ldots$$

    Suponer que $k_1 \ll k_2$, y considerar $k_1 = 1$, $k_2 = 10$, $U(0) = 3$, $V(0) = 1$.

    a) Resuelve la ED de $U(t)$, y sustituye su valor en la ED de $V'(t)$.

    b) Resuelve la segunda ED y determina la proporción $V(t)/U(t)$ entre ambos compuestos.

    c) Demuestra que $\lim_{t\to\infty} V(t)/U(t) = k_1/(k_2 - k_1)$ (llamada *proporción de equilibrio entre los isótopos*).

24. En la serie radiactiva del uranio $^{238}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{U} \longrightarrow \cdots$ las semividas son $\mathtt{T}_1 = 4'6 \cdot 10^9$ y $\mathtt{T}_2 = 245.000$ años.

    a) A largo plazo, ¿cuál es la proporción de equilibrio entre los isótopos $p_{\text{eq}} = {}^{234}\mathrm{U}/{}^{238}\mathrm{U}$?

    b) En las aguas marinas la proporción $^{234}\mathrm{U}/{}^{238}\mathrm{U}$ es siempre un 15% superior a p_{eq}. Tomamos una muestra de un coral fosilizado y observamos que la proporción $^{234}\mathrm{U}/{}^{238}\mathrm{U}$ es sólo un 5% superior a p_{eq}. Datar el coral.

25. En la serie radiactiva del radón $^{226}\mathrm{Ra} \longrightarrow {}^{210}\mathrm{Pb} \longrightarrow \cdots$ las semividas son $\mathtt{T}_1 = 1600$ y $\mathtt{T}_2 = 22$ años.

    a) Calcula la proporción $P(t)/R(t)$, y determina la proporción de equilibrio a largo plazo.

    b)Si $P(0) = 0$, ¿al cabo de cuánto tiempo se alcanza el 95% de la proporción de equilibrio?

    c) En el albayalde (un compuesto de plomo utilizado en pintura) la proporción $P(0)/R(0)$ depende de la pureza del material, pero se sabe que a lo sumo podría ser de 100. En un cuadro localizado en los años 40, presuntamente de Vermeer, se midió una proporción $P(t)/R(t) \approx 0'15$. ¿Es posible que este cuadro tuviera 300 años?

Ejercicios complementarios para practicar con ordenador

26. En una reacción química $\mathrm{A} + \mathrm{B} \xrightarrow{k} \mathrm{X}$, los moles de producto $X(t)$ tras t segundos cumplen la ecuación

$$X'(t) = kA(t)B(t).$$

Si inicialmente se tienen a moles de A, b moles de B y ninguno de X, entonces $A(t) = a - X(t)$ y $B(t) = b - X(t)$, y la ecuación queda

$$X'(t) = k\big(a - X(t)\big)\,\big(b - X(t)\big).$$

Suponer que $k = 1/2$, $a = 1$ y $b = 3$.

(a) Sin resolver la ecuación, ¿cuántas moléculas de A, B y X habrá a largo plazo? Esboza las gráficas.

(b) Resuelve la ecuación diferencial. ¿Cuándo será la cantidad de X mayor que $0'9$ moles?

(c) Suponer que se modifica la reacción de modo que disminuye progresivamente la velocidad de crecimiento de X, quedando la ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = 0'5(1-x)(3-x) - 0'25t.$$

Dibujar la solución con ordenador[1]. Determina en este caso la cantidad máxima de producto, y estima cuando se extingue.

27. Tenemos un cultivo de virus, inicialmente con mil individuos, que crece según la ley logística afectada por un factor estacional, de acuerdo con la ecuación diferencial

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \operatorname{sen}(\pi t)$$

donde $x(t)$ = número de individuos (en miles) tras t horas.

a) Con ayuda de un ordenador, representa gráficamente $x(t)$ durante las primeras 24 horas.

b) Explica entre qué valores oscila la población, y cuántas veces oscila al cabo del día.

c) Suponer que añadimos un flujo continuo de antiviral que elimina a indiv/hora (en miles), de modo que la ecuación queda

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \operatorname{sen}(\pi t) - a$$

Dibujar la solución de la ED para valores del parámetro[2] $0 \le a \le 1$. ¿A partir de qué valor de a la población se extingue? ¿Cuál es el tiempo de extinción?

28. *Opcional* (ejemplo extraído de [Petrucci, cap 16]).
Consideramos la reacción reversible $\mathrm{CO} + 2\,\mathrm{H_2} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{CH_3OH}$, que se modeliza con la ED

$$X'(t) \;=\; k_1\, A(t)\, B(t)^2 \;-\; k_2 X(t)\,.$$

donde $A(t), B(t), X(t)$ son respectivamente las concentraciones de CO, H_2 y CH_3OH tras t seg (en moles/l). Como los moles entrantes de X coinciden con los salientes de A (y los pares salientes de B), también se cumple

$$X(t) - X(0) = A(0) - A(t) = \frac{B(0) - B(t)}{2}.$$

a) Escribe una ED para $X(t)$, que no involucre a $A(t)$ y $B(t)$.

b) Sabiendo que las constantes cinéticas valen $k_1 = 14'5$ y $k_2 = 1$ (a 200 °C), resuelve con el ordenador la ED, dibuja las gráficas de $\big(A(t), B(t), X(t)\big)$ y calcula las concentraciones de equilibrio, en cada una de las siguientes situaciones iniciales

$$(0'1, 0'1, 0) \qquad (0, 0, 0'1) \qquad (0'1, 0'1, 0'1).$$

c) Hallar $t_{0.90}$ en cada caso.

---

[1] Para dibujar soluciones numéricas de ED con Maxima, se puede usar el comando `plotdf`. Por ejemplo,

`plotdf(0.5*(1-x)*(3-x)-0.25*t, [t,x], [t,0,10], [x,-1,1], [trajectory_at,0,0]).`

[2] Para dibujar soluciones numéricas dependiendo de un parámetro se puede añadir la orden `sliders`. Por ejemplo,

`plotdf(0.2*x*(5-x)+sin(%pi*t)-a, [t,x], [t,0,15], [trajectory_at,0,1], [sliders,"a=0:1"]).`