Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología Control 1, 16/3/2015

Nombre: SOLUCIONES

1.- Un modelo sencillo de crecimiento celular postula que, si $W(t)$ es el peso de una célula, entonces se cumple

$$\frac{dW}{dt} = k\,W^{2/3}, \quad \text{para cierta constante } k > 0. \qquad (*)$$

a) Resuelve la ED sabiendo que $W(0) = 1$ ngr, y que el peso se duplica en los 3 primeros días. ¿Quién es $k = 1$? ¿Cuánto tiempo se necesita para que la célula llegue a 8 ngr?

b) Suponer que $k = 0'4$ y que bajo cierto medicamento la célula pierde un 20 % de su masa cada día. Formula una ED en este caso, determina el tamaño a largo plazo y esboza la gráfica.

c) El modelo anterior se basa en el supuesto de que la velocidad de crecimiento dW/dt debe ser proporcional al área de la membrana celular (dado que la célula se alimenta a través de ésta). Si la célula tiene forma de esfera, ¿sabrías justificar por qué se cumple la ED (*)?

Nota: 3'5 puntos

a) $\frac{dW}{W^{2/3}} = k\,dt \to \int W^{-\frac{2}{3}}dW = \int k\,dt \to \frac{W^{\frac{1}{3}}}{1/3} = kt + C$

$W(0)=1 \to \boxed{3 = C}$

$W(3)=2 \to 3\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3k+3 \Rightarrow \boxed{k = 2^{\frac{1}{3}}-1 = 0'26}$

$\Rightarrow \boxed{W^{\frac{1}{3}} = \frac{k}{3}t + 1}$

Busco t / $W=8$ $\Rightarrow$ $\underbrace{8^{\frac{1}{3}}}_{=2} = \frac{k}{3}t+1 \to \boxed{t = \frac{3}{k} = 11'54 \text{ días}}$

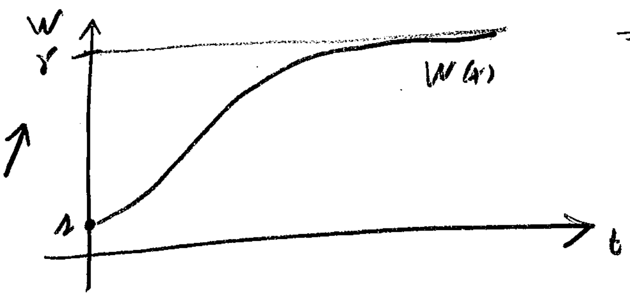
b) $\boxed{\frac{dW}{dt} = \underbrace{0'4\,W^{2/3}}_{\text{entra}} - \underbrace{0'2\,W}_{\text{sale}}}$

Busco $W_{eq} \to 0 = 0'4\,W_{eq}^{2/3} - 0'2\,W_{eq} \Rightarrow$
- o bien $W_{eq} = 0$
- o bien $W_{eq}^{\frac{1}{3}} = \frac{0'4}{0'2} = 2 \to \boxed{W_{eq} = 8}$

Como

	$0 < W < 8$	$W > 8$
Signo $\frac{dW}{dt}$	$\oplus$ ↗	$\ominus$ ↘

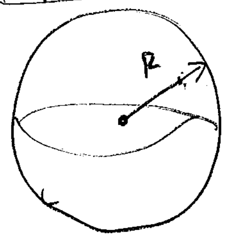
tenemos



$\Rightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} W(t) = 8}$

() Nos dicen $\frac{dW}{dt} = K \cdot A$

esfera radio R



donde $A =$ Área $=$ cte. R^2

Además $W =$ cte. Vol $=$ cte. $R^3 \Rightarrow R =$ cte. $W^{1/3}$

$$\Rightarrow \boxed{A = \text{cte } W^{2/3}}$$

2.- Tenemos una reacción reversible $A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2X$, de la que se sabe $k_1 = 4$ y se desconoce k_2. Experimentalmente observamos que cuando $A(0) = 3$, $B(0) = 4$ y $X(0) = 0$, entonces a largo plazo se alcanza $X_{eq} = 4$.

a) Formula una ED para la cantidad de producto $X(t)$

b)Determina el valor de k_2, A_{eq} y B_{eq}, y esboza la gráfica de $A(t), B(t)$ y $X(t)$.

c) Utiliza la fórmula de Euler con paso $h = 0'01$ para estimar el valor de $x(0'03)$ en la ED

$$\frac{dx}{dt} = (4-x)(24-x), \quad \text{con } x(0) = 0.$$

Nota: 3'5 puntos

entran 2 molec de X por choque A-B

salen 2 molec de X por choque X-X

a) $X' = 2k_1 A \cdot B - 2k_2 X^2$

$\boxed{A(0) = 3}$

Como $A(0) - A(t) = \frac{X(t) - \cancel{X(0)}}{2} \Rightarrow A(t) = A(0) - \frac{X(t)}{2} = 3 - \frac{X(t)}{2}$

$\boxed{B(0) = 4}$

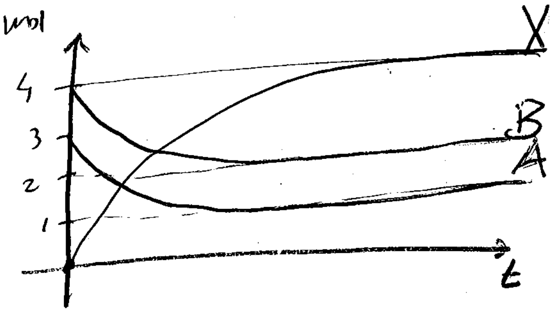
$B(0) - B(t) = \frac{X(t) - \cancel{X(0)}}{2}$ $\qquad B(t) = B(0) - \frac{X(t)}{2} = 4 - \frac{X(t)}{2}$

Por tanto $\boxed{\frac{1}{2}\frac{dX}{dt} = 4\left(3 - \frac{x}{2}\right)\left(4 - \frac{x}{2}\right) - k_2 X^2}$

b) Como $X_{eq} = 4$

$\Rightarrow A_{eq} = 3 - \frac{X_{eq}}{2} = 3 - 2 = 1$

$B_{eq} = 4 - \frac{X_{eq}}{2} = 4 - 2 = 2$



Además $0 = 4\left(3 - \frac{X_{eq}}{2}\right)\left(4 - \frac{X_{eq}}{2}\right) - k_2 X_{eq}^2$

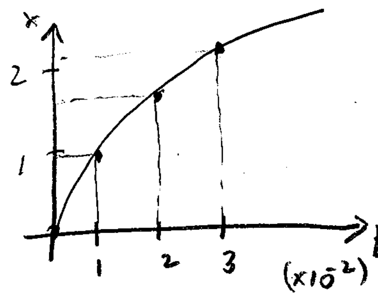
$\rightarrow 0 = 4(3-2)(4-2) - k_2 16 \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{8}{16} = 1/2}$

c) $x(0) = 0$

$x(0'01) = \overset{0}{x(0)} + 0'01 \cdot (4 - \overset{0}{x(0)})(24 - \overset{0}{x(0)}) = 0'96$

$x(0'02) = x(0'01) + 0'01 \cdot (4 - 0'96)(24 - 0'96) = 1'66$

$x(0'03) = x(0'02) + 0'01 \cdot (4 - 1'66)(24 - 1'66) = \underline{\underline{2'18}}$



3.- Durante cierto proceso inflamatorio el cuerpo acumula líquido en un tejido a un ritmo aproximado de 1 ml/min. Cuando el volumen de líquido acumulado alcanza los 50 ml, iniciamos un proceso de drenaje a un ritmo de 2 ml/min. Deseamos determinar $x(t)$ = mgr de cierta toxina acumulada en el tejido, sabiendo que cumple la ED

$$x'(t) = 6 - \frac{2x(t)}{50-t}.$$

a) Resuelve la ED, si inicialmente $x(0) = 50$ mgr.

b) Encuentra una fórmula para $q(t)$ = concentración de toxina en el tejido (en mgr/ml) tras t min, y esboza su gráfica.

c) ¿Cuál es la concentración de toxina del líquido entrante? ¿Puede ser $q(t) = 8$ mgr/ml?

Nota: 3 puntos

a) $\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{2x}{50-t} \to \boxed{\text{ec. lineal}}$

Paso 1 $\boxed{\text{Homogénea}}$ $\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{50-t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -2\frac{dt}{50-t}$

$\Rightarrow \ln x = -2\int \frac{dt}{50-t} = +2\ln(50-t) + C$

$\Rightarrow x = k\cdot(50-t)^2$

Paso 2 $\boxed{\text{Busco solución del tipo } x(t) = k(t)(50-t)^2}$

$x'(t) = k'(t)(50-t)^2 + k(t)\,2\cancel{(50-t)}(-1) = 6 - \frac{2x(t)}{\cancel{50-t}}$

$\Rightarrow k'(t) = \frac{6}{(50-t)^2} \Rightarrow k(t) = 6\int\frac{dt}{(50-t)^2} = \frac{6}{50-t} + D$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = 6\cdot(50-t) + D(50-t)^2}$

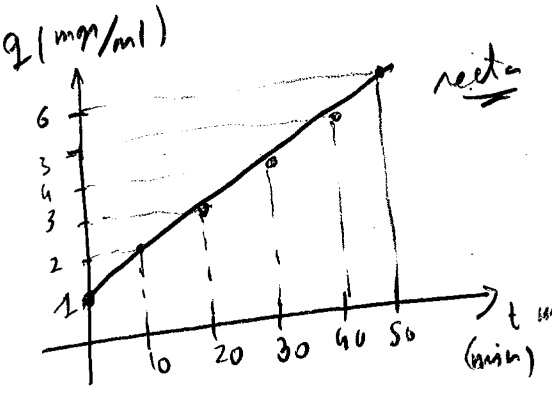
$\xrightarrow{x(0)=50}$ $50 = 6\cdot 50 + D\cdot 50^2 \to 1 = 6 + D\cdot 50 \Rightarrow D = \frac{-5}{50} = -\frac{1}{10}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = 6(50-t) - \frac{1}{10}(50-t)^2}$

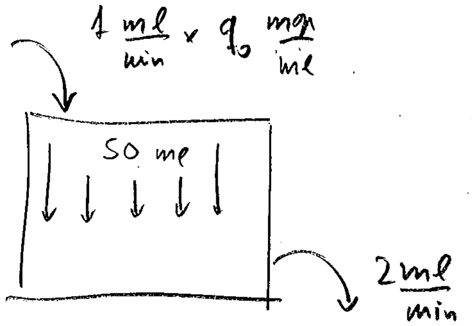
b) $q(t) = \frac{x(t)}{V(t)} = 6 - \frac{1}{10}(50-t)$

$\Rightarrow \boxed{q(t) = 1 + \frac{t}{10}}$

$\boxed{V(t) = 50 - t}$



c)



$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{2}{\underbrace{50-t}_{V(t)}} x(t)$$

$$1 \cdot q_0 \Rightarrow \boxed{q_0 = 6 \frac{mg}{ml}}$$

Como $V(t) = 50 - t \Rightarrow$ a lo sumo tendremos $t = 50$ min

(después se vacía)

$$\Rightarrow \quad q(50) = 1 + \frac{50}{10} = 6 \frac{mg}{ml}.$$

$\Rightarrow$ no se puede llegar a $q(t) = 8 \frac{mg}{ml}$.