Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología **Examen final, 26/5/2015**

Nombre:

....

1.- En ciertas reacciones químicas, la cantidad de sustrato $S(t)$ (en moles) decrece con el tiempo según la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a\,S}{2+S}$$

para cierta cte $a > 0$. Suponer que inicialmente $S(0) = 4$, y al cabo de 2 seg la cantidad de sustrato se ha reducido a la mitad.

a) Calcula el valor de la cte a

b) Determina cuánto tiempo llevará bajar a $S = 1$. ¿Cuál será el valor de S al cabo de 5 seg?

c) Si añadimos a la reacción un flujo continuo de k moles/seg de sustrato, ¿cómo quedará la ED? ¿Qué valor debería tener k para que a largo plazo la cantidad de sustrato sea de 0'5 moles?

Nota: ~~3~~ 2'5 puntos

a) $\frac{2+S}{S}\,dS = -a\,dt \rightarrow \int \left(\frac{2}{S}+1\right) dS = -at + C$

$\rightarrow 2\ln S + S = -at + C$ ⊗

$t=0,\ S=4 \rightarrow 2\ln 4 + 4 = C \rightarrow C = 4(\ln 2 + 1)$

$t=2,\ S=2 \rightarrow 2\ln 2 + 2 = -2a + C = -2a + 4(\ln 2 + 1)$

$\Rightarrow 2a = 4\ln 2 + 4 - 2\ln 2 - 2 = 2\ln 2 + 2$

$\Rightarrow \boxed{a = \ln 2 + 1} = 1'69$

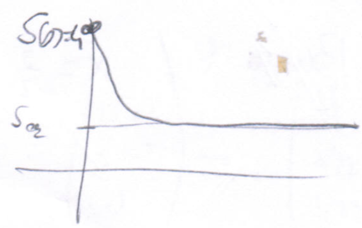
b) Busco $t \,/\, S = 1 \xrightarrow{⊗} 1 = -at + C \Rightarrow t = \frac{C-1}{a} = \frac{4\ln 2 + 3}{\ln 2 + 1} = 3'41$ seg

Si $t = 5 \Rightarrow 2\ln S + S = -5(\ln 2 + 1) + 4(\ln 2 + 1)$

$\Rightarrow 2\ln S + S = -(\ln 2 + 1) \xrightarrow{\text{Max}} S = 0'36$ moles

c) $\frac{dS}{dt} = -\frac{aS}{2+S} + k \Rightarrow$ Busco $k \,/\, S_{eq} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k = \frac{a/2}{2+\frac{1}{2}} = \frac{a}{5}$



2.- Tenemos una reacción reversible $A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2X$, de la que se desconocen k_1, k_2. Experimentalmente observamos que

$$A(0) = 5,\ B(0) = 1'5,\ X(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad X_{eq} = 2.$$

a) Determina el valor de A_{eq} y B_{eq}, y encuentra una relación entre k_1 y k_2.

b) Sabiendo que $X'(0) = 3$ mM/seg, determina el valor de las constantes k_1 y k_2.

c) La cantidad de producto $X(t)$ cumple la ED

$$X'(t) = \tfrac{1}{10}\left(2 - X(t)\right)\left(X(t) + 15\right), \quad \text{con } X(0) = 0$$

3

Resuelve la ED y calcula el valor de $t_{0,75}$. Esboza las gráficas de $X(t)$, $A(t)$ y $B(t)$.

Nota: 3 puntos

$A + B \underset{K_2}{\overset{K_1}{\rightleftharpoons}} 2X$

$A(0) - A(t) = \frac{x(t) - x(0)}{2} \Rightarrow A(t) = \frac{2A(0) - x(t)}{2}$

$x'(t) = 2K_1 A(t) B(t) - 2K_2 x(t)^2$

$B(0) - B(t) = \frac{x(t) - x(0)}{2} \Rightarrow B(t) = \frac{2B(0) - x(t)}{2}$

$\frac{X_{eq}^2}{A_{eq} \cdot B_{eq}} = \frac{K_1}{K_2} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{K_1}{K_2} \Rightarrow \boxed{K_1 = 2K_2}$

Relación entre K_1 y K_2

$A_{eq} = \frac{2 \cdot 5 - X_{eq}}{2} \Rightarrow \left[A_{eq} = \frac{10-2}{2} = 4\right]$

$B_{eq} = \frac{2 \cdot 1'5 - x_{eq}}{2} \Rightarrow \left[B_{eq} = \frac{3-2}{2} = 1/2\right]$

$x'(t) = 2K_1 \cdot \left(\frac{10 - x(t)}{2}\right)\left(\frac{3 - x(t)}{2}\right) - 2K_2 x(t)^2 \xRightarrow{x'(0)=3} 3 = 2 \cdot 2K_2 \cdot \left(\frac{10-0}{2}\right)\left(\frac{3-0}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = 4K_2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow 3 = 2K_2 \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow 1 = 10K_2 \Rightarrow \boxed{K_2 = 1/10}\ \boxed{K_1 = 2K_2 = 2/10}$

c) $x'(t) = \frac{1}{10}\left(2 - x(t)\right)\left(x(t) + 15\right)$ $X(0) = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{(2-x)(x+15)} = \int \frac{1}{10}\, dt \Rightarrow$

↳ sigo debajo en (*1)

~~$\Rightarrow \frac{1}{17}\ln|x+15| - \frac{1}{17}\ln|2-x| = \frac{1}{10}t + C \Rightarrow \frac{1}{17}\ln\left|\frac{15+x}{x}\right|$~~

* resuelvo la primera integral

$\int \frac{dx}{(2-x)(x+15)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{x+15} \Rightarrow 1 = A(x+15) + B(2-x)$ $\begin{cases} x=2 \to A = 1/17 \\ x=-15 \to B = 1/17 \end{cases} \Rightarrow$

Aplico $x(0)=0$

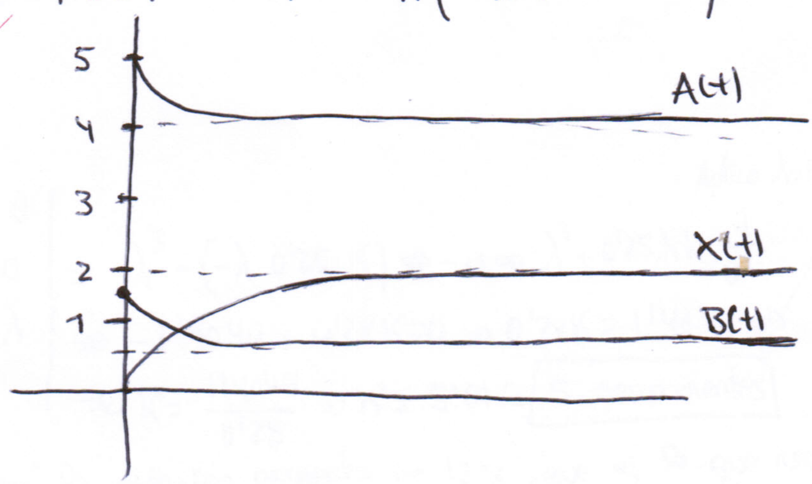
(*1) $\int \frac{1/17}{2-x}dx + \int \frac{1/17}{x+15}dx = \frac{1}{10}t + C_1 \Rightarrow -\frac{1}{17}\ln|2-x| + \frac{1}{17}\ln|x+15| = \frac{1}{10}t + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{17}\ln\frac{15}{2} = C_1}$ // $\frac{1}{17}\ln\left|\frac{x+15}{2-x}\right| = \frac{1}{10}t + \frac{1}{17}\ln\frac{15}{2} \Rightarrow \boxed{\ln\frac{x+15}{2-x} = \frac{17}{10}t + \ln\frac{15}{2}}$

Busco $t_{0'75} \Rightarrow X_{100} = 2$ $X_{75} = 2 \cdot 0'75 \Rightarrow \boxed{X_{75} = 1'5}$ → sustituyo en la ecuación recuadrada arriba

$\ln\left|\frac{1'5 + 15}{2 - 1'5}\right| = \frac{17}{10}t + \ln\frac{15}{2} \Rightarrow \frac{17}{10}t = \ln\left|\frac{16'5}{0'5}\right| - \ln\left|\frac{15}{2}\right| \Rightarrow t = \frac{10}{17}\left(\ln\left|\frac{16'5}{0'5}\right| - \ln\left|\frac{15}{2}\right|\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 0'8715$ segundos



3.- Diseñamos una planta transgénica cuya vida máxima es de 3 meses. Además, sólo la cuarta parte de las plantas sobrevive el primer mes y de éstas, sólo la mitad sobrevive el segundo mes. Durante el primer mes las plantas no producen semillas, durante el segundo mes cada planta tiene un número medio de 6 descendientes, y durante el tercero de 9.

a) Escribe la matriz de Leslie que describe la evolución de esta población.

b) Experimentalmente se observa que el número total de plantas crece aprox un 50 % al mes. ¿Sabrías justificar por qué esto es así? Calcula a partir de este dato el porcentaje de plantas que habrá en cada clase.

c) Si empezamos con 10 plantas jóvenes, utiliza el ordenador para esbozar la gráfica del número de plantas de cada clase en los primeros 12 meses (puedes usar Maxima o Excel).

d) Por motivos de espacio, queremos un crecimiento de, a lo sumo, un 12 % al mes. Para ello el laboratorio sólo conserva k descendientes de las plantas más jóvenes, vendiéndose el resto. ¿Quién debería ser k?

Nota: 3 puntos

3

a) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz de Leslie

b) Se sabe a partir del autovalor principal de la matriz $\left(\lambda_1 = \frac{3}{2} = 1+0.5\right)$

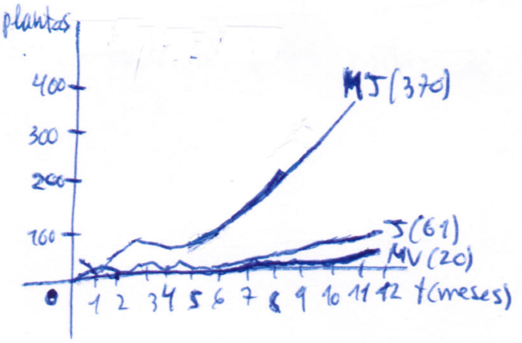
Si usamos el autovector del autovalor principal, podemos obtener el porcentaje de cada especie a largo plazo:

$\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/6 \\ 1/18 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{% plantas más jóvenes} = \frac{1}{1+1/6+1/18} \cdot 100 = 81{,}81\,\%}$

$\boxed{\text{% porcentaje plantas jóvenes} = \frac{1/6}{1+1/6+1/18} \cdot 100 = 13{,}63\,\%}$

$\boxed{\text{% plantas más viejas} = \frac{1/18}{1+1/6+1/18} \cdot 100 = 4{,}54\,\%}$

c)


d) $\begin{pmatrix} 0 & K & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \lambda_1 = \frac{\sqrt{K}}{2} \right. \rightarrow \frac{\sqrt{K}}{2} = 1{,}12 \rightarrow \boxed{K = (2\cdot 1{,}12)^2 = 5{,}017}$

Aproximadamente una "fecundidad" de 5 plantas por cada una de las más jóvenes. Así que nos quedamos con 5 por cada una y vendemos el resto

4.- Considera el siguiente modelo para la evolución de una epidemia de rubeola

$$\begin{cases} S' = -bIS + c \\ I' = -aI + bIS \end{cases}$$

donde $S = S(t)$ e $I = I(t)$ denotan, respectivamente, las poblaciones (en miles) de susceptibles e infectados tras t semanas. Suponer que los parámetros son $a = 1$, $b = 0'05$ y $c = 1$.

X a) Calcula el punto de equilibrio del sistema, y determina si es estable o inestable.

X b) Esboza la gráfica de la solución cuando $S(0) = 40$, $I(0) = 0'1$ (puedes usar `plotdf`). ¿Cuál es número máximo de individuos infectados? ¿Cada cuánto tiempo hay brotes de enfermedad? ¿Qué ocurre a largo plazo?

X c) Un modelo alternativo sugiere tomar una tasa de contagio que varíe con el tiempo

$$b = 0'05 * \big(1 + 0'4 * \sin(t/10)\big).$$

Resuelve el sistema con `rk`, y comprueba que en este caso la epidemia se repite periódicamente. ¿Cada cuanto tiempo ocurren los brotes y qué tamaño alcanzan?

Nota: 1'5 puntos

1'4

A

$$\begin{cases} S' = -0'05 IS + 1 \\ I' = -I + 0'05 IS \end{cases}$$

Punto de equilibrio

$$\begin{cases} 0 = -0'05\, I_{eq} S_{eq} + 1 \\ 0 = -I_{eq} + 0'05\, I_{eq} S_{eq} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -0'05\, I_{eq} S_{eq} + 1 \\ 0 = I_{eq}(-1 + 0'05 S_{eq}) \end{cases}$$

2ª ecuación: $I_{eq} = 0$ y $-1 + 0'05 S_{eq} = 0$ $\quad \underline{S_{eq} = 20}$

↳ ésta no no dice nada → 1ª ecuación $0 = 1$

Con $S_{eq} = 20$ → 1ª ecuación $\quad 0 = -0'05\, I_{eq} \cdot 20 + 1$; $\boxed{I_{eq} = 1}$

* Para calcular si es estable o no debemos de ver cómo son los autovalores.

Llamamos $D = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial I} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial I} \end{pmatrix}$ donde $S' = F(S, I)$, $I' = G(S, I)$

$D = \begin{pmatrix} -0'05 I & -0'05 S \\ 0'05 I & -1 + 0'05 S \end{pmatrix}$ y probamos con $D|_{S_{eq}, I_{eq}}| = D|_{20,1} = \begin{vmatrix} -0'05 & -1 \\ +0'05 & 0 \end{vmatrix}$ →

$$\begin{vmatrix} -0'05 - \lambda & -1 \\ 0'05 & -\lambda \end{vmatrix} = (-0'05 - \lambda)(-\lambda) + 0'05 = 0$$

$$0'05\lambda + \lambda^2 + 0'05 = 0$$

$$\frac{-0'05 \pm \sqrt{2'5\times10^{-3} - 4 \cdot 0'05 \cdot 0'05}}{2 \cdot 0'05} = \frac{-0'05 \pm \sqrt{-7'5\times10^{-3}}}{0'1}$$

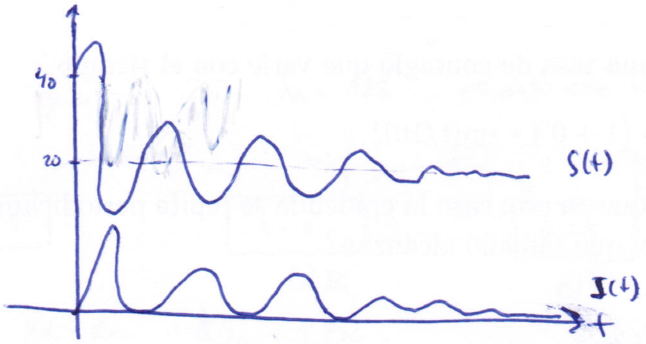
Autovalores complejos con $a < 0$

El equilibrio del sistema es ~~inestable~~. estable

Hecho a ordenador:

(B)

- A largo plazo la I tiende a 1 y la S tiende a 20 individuos.
- Hay brote de la enfermedad cada 30 días aproximadamente
- El nº máximo de individuos afectados es: 8'5 (entre 8 y 9) individuos afectados en el primer brote.



(C) Hecho a ordenador:

- Observamos que hay dos tipos de brotes, unos con mayor gravedad que otros. ~~Los más graves (picos más altos)~~ se repiten aproximadamente cada 60 semanas. (entre 60-65)

- En el caso de la y: (I): Tienen un máximo en un valor de ~~8~~ $0<y<8$ en el caso de los brotes más fuertes y en el caso de los brotes más débiles entre $0<y<1'5$
- En el caso de la x: (S):

Tienen un máximo en torno al valor 40 en el caso de los brotes más fuertes:

$9 < x < 40$