10

[redacted] ....

1.- En cierta reacción química los moles de producto $x(t)$ tras t segundos evolucionan según la ED

$$x'(t) = k\,x(t)\,\big(12 - x(t)\big)$$

donde $k > 0$ es una constante. Si empezamos con 2 moles de producto, y al cabo de 3 segundos se alcanzan 6 moles,

a) Esboza la gráfica de $x(t)$.

b) Resuelve la ED y determina el valor de la cte k.

c) ¿Qué densidad habrá al cabo de 6 segundos? ¿Cuándo se completa el 95 % de la reacción?

(b) $x'(t) = kx(t)(12 - x(t))$

$$\frac{dx}{dt} = kx(12-x) \to \frac{dx}{x(12-x)} = k\,dt \to \int \frac{dx}{x(12-x)} = \int k\,dt = kt + C$$

$$\int\frac{dx}{x(12-x)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{12-x}\right) dx = \frac{1}{12}\ln|x| - \frac{1}{12}\ln|12-x| = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x}{12-x}\right|$$

$1 = 12A - Ax + Bx$

$1 = 12A \to A = \frac{1}{12}$

$A = B$

$B = \frac{1}{12}$

$$\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x}{12-x}\right| = kt + C$$

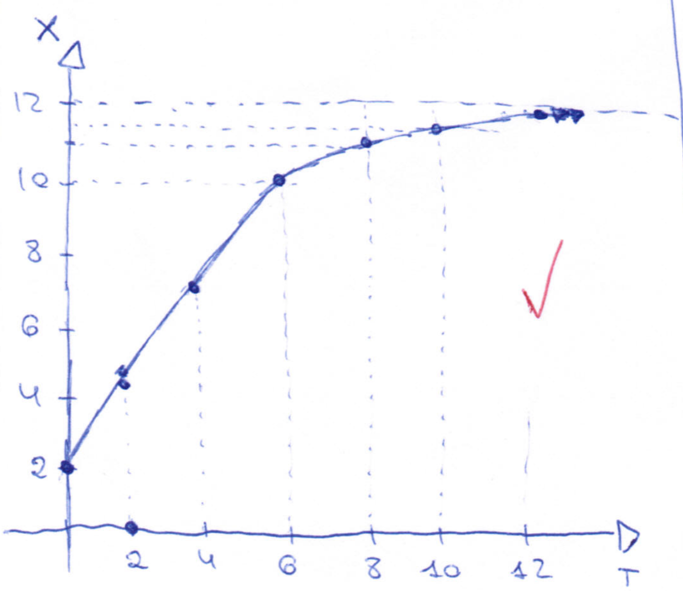
$x(0) = 2$

$$\frac{1}{12}\ln\left(\frac{2}{12-2}\right) = 0\cdot k + C$$

$$C = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{12}\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -0{,}134$$

X	T
2	0
4,45	2
7,61	4
10,03	6
11,25	8
11,73	10
12	∞

(a)



$$\frac{1}{12}\ln\left(\frac{x}{12-x}\right) = kt - 0{,}134$$

$x(3) = 6$

$$\frac{1}{12}\ln\left(\frac{6}{12-6}\right) = 3\cancel{K} - 0{,}134$$

$$\cancel{\frac{1}{12}\ln}\, 1 = 3k - 0{,}134 \to 3k = 0{,}134$$

$$\boxed{k = 0{,}045}$$

$$\frac{1}{12}\ln\left(\frac{x}{12-x}\right) = 0{,}045t - 0{,}134$$

$$\ln\left(\frac{x}{12-x}\right) = 0{,}54t - 1{,}61$$

$$\frac{x}{12-x} = e^{0{,}54t - 1{,}61} = 0{,}2e^{0{,}54t}$$

$$x = 2{,}4e^{0{,}54t} - 0{,}2xe^{0{,}54t}$$

$$x + 0{,}2xe^{0{,}54t} = 2{,}4e^{0{,}54t}$$

$$x(1 + 0{,}2e^{0{,}54t}) = 2{,}4e^{0{,}54t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{2{,}4e^{0{,}54t}}{1 + 0{,}2e^{0{,}54t}}}$$

ⓒ $x(t) = \dfrac{2{,}4e^{0{,}54t}}{1+0{,}2e^{0{,}54t}}$

$$x(6) = \frac{2{,}4e^{0{,}54\cdot 6}}{1+0{,}2e^{0{,}54\cdot 6}} = \frac{61{,}28}{6{,}107} = \boxed{10{,}03 \text{ moles}}$$

El máximo de la reacción se alcanza cuando $x=12$. El 95% de 12 es 11,4. Calculamos t:

$$\ln\left(\frac{x}{12-x}\right) = 0{,}54t - 1{,}61$$

$$\ln\left(\frac{11{,}4}{12-11{,}4}\right) = 0{,}54t - 1{,}61$$

$$\ln 19 = 0{,}54t - 1{,}61 \rightarrow 2{,}94 = 0{,}54t - 1{,}61 \rightarrow 4{,}55 = 0{,}54t \rightarrow \boxed{t = 8{,}43 s}$$