N [redacted] ....

10

Crece $\frac{x_{n+1}}{x_n}$

Prop $\frac{x_n}{x_n+y_n}$

El fartet es un pez endémico de los humedales de la zona. En un estudio sobre la cría en cautividad, se divide la población en alevines x_n (menores de 1 año) y adultos y_n (mayores de 1 año), y se observa que su evolución anual cumple aproximadamente

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 12{,}5y_n \\ y_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}5y_n \end{cases}$$

✓ (a) A partir del sistema, determina la fecundidad y tasa de mortalidad de alevines y adultos.

✓ (b) Si inicialmente comenzamos con 10 adultos, ¿cuántos individuos de cada clase habrá al cabo de 2 años?

✓ (c) Determina si la población crece o decrece a largo plazo, y por qué factor se multiplica anualmente.

✓ (d) Determina la proporción aproximada de alevines y adultos a largo plazo.

✓ (e) ¿Qué fecundidad media deberían tener los adultos para que a largo plazo la población se multiplique por 2'5 cada año?

a) $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 12'5y_n \\ y_{n+1} = 0'2x_n + 0'5y_n \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{\overline{X}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12'5 \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{\overline{X}_n}$$

$$\overline{X}_{n+1} = A \cdot \overline{X}_n$$

En la matriz ~~A~~ la 1ª fila corresponde a la fecundidad y la 2ª fila a la ~~superf~~ supervivencia. Por tanto:

fecundidad ↗ alevines : 2
↘ adultos : 12'5

mortalidad ↗ alevines : 0'8 = 80%
↘ adultos : 0'5 = 50%

b) Inicialmente $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\overline{X}_n = A^n \overline{X}_0$$

$$\overline{X}_2 = A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12'5 \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 12'5 \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6'5 & 31'25 \\ 0'5 & 2'75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 312'5 \\ 27'5 \end{pmatrix}$$

Al cabo de 2 años habrá 312'5 alevines y 27'5 adultos.

c) Hay que calcular el autovalor dominante:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12'5 \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 12'5 \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 12'5 \\ 0'2 & 0'5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(0'5-\lambda) - (0'2 \cdot 12'5) =$$
$$= 1 - 2\lambda - 0'5\lambda + \lambda^2 - 2'5 =$$
$$= \lambda^2 - 2'5\lambda - 1'5$$

$$\lambda = \frac{2'5 \pm \sqrt{2'5^2 - 4(-1'5)}}{2} = \frac{2'5 \pm 3'5}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1/2 \end{cases}$$

Como $\lambda_1 = 3$ la población crece a largo plazo.
Se multiplica $\times 3$ cada año.

d) Hay que calcular los autovectores

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Busco $\vec{p_1}$ / $A\vec{p_1} = \lambda_1 \vec{p_1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 12'5 \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2u + 12'5v = 3u \\ 0'2u + 0'5v = 3v \end{cases} ; \quad \begin{array}{l} 12'5v = u \\ 0'5v - 3v = -0'2u \\ -2'5\cancel{v} = -0'2u \xrightarrow{\times(-5)} +12'5v = u \end{array}$$

$$\begin{cases} u = 12'5t \\ v = t \end{cases} \quad \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 12'5t \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{t=1} \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 12'5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La proporción de indiv. de cada clase a largo plazo viene determinada por $\vec{p_1}$:

$$\text{alumnos} = \frac{x_n}{x_n + y_n} = \frac{12'5}{13'5} = 0'93$$

$$\text{adultos} = \frac{y_n}{x_n + y_n} = \frac{1}{13'5} = 0'07$$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix}$ Busco α / $\lambda_1 = 2'5$

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0'2 & 0'5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha \\ 0'2 & 0'5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(0'5-\lambda) - 0'2\alpha =$$
$$= 1 - 2\lambda - 0'5\lambda + \lambda^2 - 0'2\alpha =$$
$$= \lambda^2 - 2'5\lambda - 0'2\alpha + 1$$

$$\text{Si } \lambda_1 = 2'5 \Rightarrow 2'5^2 - 2'5 \cdot 2'5 - 0'2\alpha + 1 = 0$$
$$\cancel{6'25} - \cancel{6'25} - 0'2\alpha + 1 = 0$$
$$-0'2\alpha = -1$$
$$\alpha = 1/0'2 = 5$$
$$\boxed{\alpha = 5}$$