Ecuaciones Diferenciales, 1º Biotecnología **Test 5, 11/5/2015**

Nombre: ....

9'8

En un cierto circuito, la cantidad de carga en el condensador cumple la ecuación diferencial

$$Q''(t) + RQ'(t) + 20Q(t) = 0.$$

Inicialmente el condensador está descargado y le imprimimos una intensidad de corriente $Q'(0) = 4$.

x a) Resuelve la ecuación diferencial cuando $R = 4$, esbozando la gráfica de la solución.

x b) Determina la carga máxima que alcanzará el condensador.

x c) ¿Cuál debería ser la resistencia R para que la carga en el condesador no oscile?

A $\begin{cases} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) = 0 \\ Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 4 \end{cases}$

$p(\lambda) \to \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$

$\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 20}}{2} = -2 \pm \dfrac{\sqrt{64}\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm 4i$.

Como los autovalores son complejos nos encontramos ante un caso C del teorema.

$\to x(t) = C_1 e^{-2t}\cos(4t) + C_2 e^{-2t}\operatorname{sen}(4t) = C_2 e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)$

$\xrightarrow{t=0}$ $0 = C_1 \cdot 1 + 0$; $\underline{C_1 = 0}$

$x'(t) = C_2\left[e^{-2t}\cdot(-2)\cdot\operatorname{sen}(4t) + e^{-2t}\cdot\cos(4t)\cdot 4\right]$

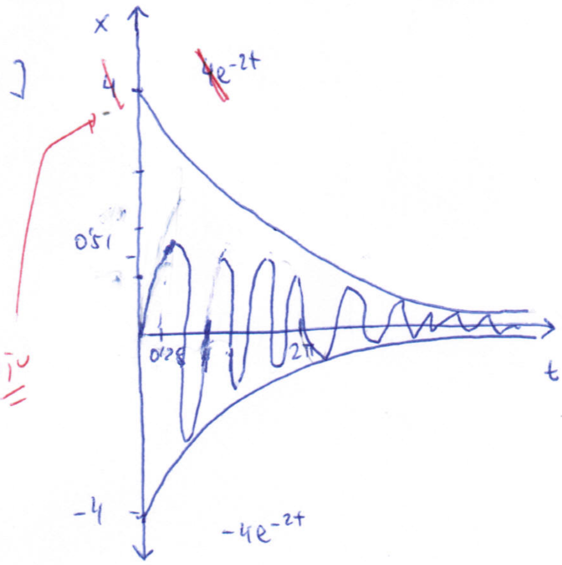
$\xrightarrow{t=0}$ $4 = C_2[0 + 4]$ $\quad 4C_2 = 4 \quad \underline{C_2 = 1}$

La solución es: $\boxed{x(t) = e^{-2t}\cdot\operatorname{sen}(4t)}$

* La frecuencia es 4Hz y oscila entre $\pm \cancel{4}e^{-2t}$ 0'50

A largo plazo $x(t)$ tiende a 0 (cuando $t \to \infty$)

Gráfica



C Para que no oscile:

$p(\lambda) \to \lambda^2 + R\lambda + 20 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\cdot 20}}{2}$ Si queremos que no oscile:

$R^2 - 80 \geq 0$; $\boxed{R \geq 8'94}$

[Comprobación: si $R = 9 \to \sqrt{81 - 4\cdot 20} = \sqrt{1} = 1$, no oscila]

(B) La carga máxima del condensador: $\longrightarrow x'(t) = 0$

$$x'(t) \Rightarrow \left[e^{-2t} \cdot (-2) \cdot \operatorname{sen}(4t) + e^{-2t} \cdot \cos(4t) \cdot 4 \right] = 0$$

$$-2e^{-2t} \cdot \operatorname{sen}(4t) + 4e^{-2t} \cos(4t) = 0$$

$$+2e^{-2t} \left[-\operatorname{sen}(4t) + 2\cos(4t) \right] = 0$$

$2e^{-2t} = 0$ (No nos dice nada)

$-\operatorname{sen}(4t) + 2\cos(4t) = 0$

$$2\cos(4t) = \operatorname{sen}(4t) \quad ; \quad 2 = \frac{\operatorname{sen}(4t)}{\cos(4t)} \quad ; \quad 2 = \operatorname{tg}(4t)$$

$$4t = \operatorname{arctg} 2 \quad ; \quad \underbrace{t = \frac{\operatorname{arctg} 2}{4} = 0'28 + \frac{k\pi}{4}}$$

* El primer máximo: $x(0'28) \Rightarrow$

$$x(0'28) = e^{-2 \cdot 0'28} \operatorname{sen}(4 \cdot 0'28) = \underline{\underline{0'51}}$$

perfecto