## Hoja 1: Números reales y principio de inducción

1. Indicar en la recta real todos los valores de $x$ que satisfacen las siguientes condiciones:

   (i) $|6x+5| < 1$,

   (ii) $|x+1| \le |x-1|$,

   (iii) $x^3 - 2x^2 + 2 < x$,

   (iv) $|x^2 - 8| \le 1$,

   (v) $\frac{x^2-2}{x^2+2} < 0$,

   (vi) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

2. Demostrar las siguientes desigualdades para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

   (i) $|x-y| \le |x| + |y|$

   (ii) $||x| - |y|| \le |x-y|$.

   (iii) Si $x, y \ge 0$, entonces $\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

   (iv) Si $x, y \ge 0$, entonces $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$.

3. Demostrar por inducción

   (i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$

   (iii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

   (iv) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

   (v) $n! > 2^n$, para todo $n \ge 4$;

   (vi) *Desigualdad de Bernoulli:* $(1+x)^n \ge 1 + nx$, para todo $x \ge -1$, $n \ge 1$;

   (vii) $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. *Fórmula de sumación de una progresión geométrica:* demostrar por inducción sobre $n$ que para todo número real $r \ne 1$ se tiene
$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}.$$

5. Demostrar que
$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \text{y} \quad \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$
Trata de encontrar una fórmula para $\max\{x,y,z\}$, usando por ejemplo la identidad $\max\{x,y,z\} = \max\big\{x, \max\{y,z\}\big\}$. ¿Sabrías escribir un programa que calcule el máximo de una lista de números $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (usando sólo sumas y `abs`)?

6. Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales, justificando si son máximo o mínimo en algún caso:

   (i) $A = \{x : x^2 < 9\}$,

   (ii) $B = \{x : x^2 \ge 9\}$,

   (iii) $C = \left\{x + \frac{1}{x} : x > 0\right\}$,

   (iv) $F = \left\{-\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$,

   (v) $G = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$,

   (vi) $H = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ 1 \le x^2 < 2\}$.

7. Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, hallar el ínfimo del conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$.

8. Demostrar que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, para todo $A, B \subset \mathbb{R}$, donde el conjunto $A+B$ se define como $A + B = \{a + b : a \in A, \, b \in B\}$. ¿Es cierto que $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$? Calcular el supremo y el ínfimo del conjunto $(A - B)$.

9. ¿**Verdadero o falso** (demostrar o dar un contraejemplo en cada caso)?

   *Si* $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ *es una colección decreciente de intervalos, entonces :*

   (a) $\text{ínf}_n \big(\sup I_n\big) \;\leq\; \sup_n \big(\text{ínf}\, I_n\big)$

   (b) $\sup_n \big(\text{ínf}\, I_n\big) \;\leq\; \text{ínf}_n \big(\sup I_n\big)$

10. **Opcional:** Sea $P(n) = n^2 + n + 41$, $n = 0, 1, 2, \dots$

    a) utiliza un ordenador para comprobar que $P(n)$ es número primo para $n < 40$

    b) ¿Puede concluirse que $P(n)$ es un número primo para todo $n \in \mathbb{N}$?