Hoja 2: Sucesiones

1. Calcular el límite de las siguientes sucesiones (si existe)

$$(a)\ \left\{\frac{3n^2-8}{2n^3+8}\right\} \quad (b)\ \left\{\frac{(n+1)(2-3n)}{(2n-1)(4n+3)}\right\} \quad (c)\ \left\{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}\right\}$$
$$(d)\ \left\{\frac{\sqrt{2n^3+1}+n}{n^2+2}\right\} \quad (e)\ \left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\} \quad (f)\ \left\{\frac{(-1)^n+n}{n}\right\}$$
$$(g)\ \left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\} \quad (h)\ \left\{\frac{7^n+3^{n+1}}{3^n-7^{n+1}+2}\right\} \quad (i)\ \left\{\sqrt{n^2-n}-n\right\}$$
$$(j)\ \left\{4^n-n^2\right\} \quad (k)\ \left\{\sqrt[n]{2^n+5^n}\right\} \quad (l)\ \left\{\sqrt[n]{n^n+3^n}\right\}$$

2. Utiliza la regla de Stolz para calcular los límites de las siguientes expresiones

$$(a)\ \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \qquad (b)\ \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} \quad (p\in\mathbb{N}) \qquad (c)\ \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$$

3. Utilizando el número e, calcular los límites de

$$a_n=\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n=\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n}.$$

4. Considera la sucesión recurrente dada por $a_{n+1}=\sqrt{a_n+a_n^2}$, con $a_1=1$.

   (i) Demuestra que a_n es creciente

   (ii) Demuestra que $\lim a_n=+\infty$

   (iii) Utiliza Stolz (justificadamente) para calcular $\lim \dfrac{a_n}{n}$

5. Considera la sucesión recurrente dada por $a_{n+1}=\sqrt{r\cdot a_n}$, donde $r>0$ es un parámetro fijo. Suponer que escogemos $a_0\in(0,r)$.

   a) Prueba por inducción que $a_n\le r$, para todo $n=0,1,2,\ldots$

   b) Prueba que a_n es creciente.

   c) Deduce que existe el límite de a_n y calcula su valor.

   d) ¿Sabrías hallar una fórmula para el término general a_n?

6. Sea $a_1=1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$\text{(a) } a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n, \quad \text{(b) } a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n, \quad \text{(c) } a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n, \quad \text{(d) } a_{n+1}=1+\frac{1}{2}a_n.$$

   Trata de calcular el término general y deduce el valor de su límite.

7. Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$\text{(a) } \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}, \quad \text{(b) } 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}, \quad \text{(c) } 1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}.$$

   Calcular su valor numérico (si es posible, probando que los límites existen).

8. a) Probar por inducción que para $n=1,2,\ldots,$

$$2^{n-1}n!\le n^n\le e^{n-1}n!$$

   b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}=\infty.$$

9. Considera la sucesión

$$d_{n+1} = (1'04)d_n - L, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde d_n corresponde, en un modelo de hipoteca, al dinero que se debe al banco tras n años, si se realiza un único pago anual de L euros al final de cada año.

(i) En este modelo, ¿qué tipo de interés anual nos cobra el banco?

(ii) Hallar una fórmula para el término general d_n

(iii) Suponer que d_0=150.000 euros. Hallar L para que $d_n = 0$ cuando $n = 20$ años

(iv) Con el mismo d_0, si queremos que $L = 7200$ euros, ¿cuántos años necesitaríamos para pagar la hipoteca?

10. Considera la sucesión recurrente

$$C(N) \;=\; 2 \cdot C(N/2) \;+\; \kappa \cdot N,$$

que corresponde al número de operaciones del algoritmo `fft` aplicado a un vector de tamaño $N = 2^n$.

(i) Demuestra que $C(2^n) = 2^n \cdot C(1) + \kappa \cdot n\, 2^n$.

(ii) Sabiendo que $C(1) = 0$ y $\kappa = 3/2$, determina el tiempo de cálculo de la `fft` de un vector de tamaño $N = 2^{20}$, en un ordenador que hace 10^9 operaciones/segundo.

(iii) Halla el tiempo de cálculo cuando se usa el algoritmo clásico `dft`, que requiere un número de operaciones

$$D(N) = N^2 + N(N-1).$$

(iv) Compara ambas sucesiones dibujándolas, para $1 \leq N \leq 2^{20}$, en una escala logarítmica adecuada.

11. Se diseña un algoritmo de modo que, si a_n es el número de operaciones sobre un vector de n datos, entonces se cumplen las siguientes reglas

    a) para vectores de 1 dato, el número de operaciones es 1

    b) para vectores con n datos, tras realizar $4n$ operaciones se reduce el problema a un vector de $n-1$ datos, sobre el que se ejecuta el mismo algoritmo.

(i) Encuentra una fórmula de recurrencia para a_n

(ii) Estudia una fórmula para el término general a_n

(iii) Demuestra que se cumple $|a_n - 2n^2| \leq 2n$, para todo $n = 1, 2 \ldots$

(iv) Demuestra que $\lim \frac{a_n}{2n^2} = 1$.

12. **Opcional.** Supón que en el ejercicio anterior se encuentra una nueva formulación del algoritmo de modo que en el paso b), la reducción se realiza a un vector con $n/2$ datos. Si suponemos que comenzamos con vectores de tamaño $n = 2^m$, encuentra la recurrencia en este caso, así como el orden de crecimiento del algoritmo.