Hoja 3. Funciones: límites y continuidad

1. Para las siguientes funciones, determina el dominio y esboza su gráfica. Especifica un intervalo donde la función sea inyectiva y calcula su función inversa.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad g(x) = x^2 - 4x + 3, \qquad h(x) = \frac{x}{x+1}.$$

2. Calcula los siguientes límites, tratando de no usar la regla de L'Hôpital.

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^{-4}}}{2+x^{-2}} \qquad (b)\ \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3} \qquad (c)\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,(\cos\tfrac{1}{x^2} + \operatorname{sen}\tfrac{1}{x^2})$$

$$(d)\ \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} \qquad (e)\ \lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} \qquad (f)\ \lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3}$$

3. Esboza la gráfica y determina si existe el límite cuando $x \to 0^+$ de las siguientes funciones

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \qquad g(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \qquad h(x) = 1/\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

¿Sabrías decir qué ocurre si $x \to 0^-$? ¿Alguna de las funciones será continua en $x = 0$?

Sugerencia: usando la propiedad $a - 1 < \lfloor a \rfloor \le a$, trata de emparedar las funciones anteriores. Para la última pregunta trata de usar $\lfloor -a \rfloor = -\lceil a \rceil$.

4. Usando el teorema de Bolzano, demuestra que las siguientes funciones se anulan en el intervalo $(0, 1)$

$$f(x) = x^4 - 3\sqrt{x} + 1, \quad g(x) = \tfrac{1}{2} - e^{-x^2}, \quad h(x) = \cos(3\pi x) - 10x + e.$$

¿Cuántas iteraciones se necesitan para aproximar la raíz con error $\le 10^{-5}$? Utiliza el ordenador para dibujar las gráficas, y obtener una aproximación de la raíz con 8 decimales exactos.

5. Esboza las curvas, y usando el teorema de Bolzano determina con 3 decimales dónde se cortan

$$(a)\ f(x) = x - 1 \text{ y } g(x) = 3e^{-x} \qquad (b)\ f(x) = x^3/10 \text{ y } g(x) = \cos(x)$$

6. **V/F:**
   a) $f(x) = \tan(\pi x)$ tiene al menos una raíz $x \in (1/4, 3/4)$
   b) si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo en todo intervalo cerrado, entonces es continua
   c) la función $f(x) = 10^{10^x}$ es acotada en el intervalo $[0, 10]$
   d) si $f \in C([0, \infty)$ y acotada superiormente, entonces alcanza su máximo
   e) si $f \in C([0, \infty)$ es positiva y tiende a 0 cuando $x \to \infty$, entonces alcanza su máximo

7. Si f es continua y envía el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo, demuestra que f tiene algún punto fijo, es decir, existe algún $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

8. Demuestra que a lo largo del ecuador del planeta tierra (y a la misma altitud snm), siempre existen 2 puntos antipodales donde la temperatura es idéntica.

   Sugerencia: si $T(\theta)$ mide la temperatura en el meridiano θ, considera la función $f(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi)$.