Hoja 4. Funciones: derivadas

1. Practica las reglas de derivación calculando las derivadas de las siguientes funciones

$$(a)\ \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x^2-1} \qquad (b)\ \arctan\sqrt{x^2-1} \qquad (c)\ \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad (d)\ e^{e^x}$$
$$(e)\ (\log x)^x \qquad (f)\ x^{\log x} \qquad (g)\ x^{\frac{1}{x}} \qquad (h)\ x^{x^{\cos x}}$$

2. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones, para las que suponemos que $f(0) = 0$

$$(a)\ f(x) = x^{\frac{1}{3}} \qquad (b)\ f(x) = x^3/|x| \qquad (c)\ f(x) = x\ \arctan(1/x) \qquad (d)\ f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$$

Utiliza el ordenador para esbozar las gráficas en un entorno adecuado del origen.

3. Se definen el coseno y seno hiperbólico como

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Comprueba que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Calcula las derivadas de $\cosh(x)$ y $\sinh(x)$, y las derivadas de sus funciones inversas $\operatorname{acosh}(y)$ y $\operatorname{asinh}(y)$.

Sugerencia: No es necesario calcular las funciones inversas, basta usar el teorema que vimos en clase.

4. Esboza la gráfica y determina la derivabilidad de la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

¿Por qué número a multiplicarías el último trozo para que f sea derivable en $x = 2$?

5. Determina el valor de a para que la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 5ax$ en el origen:

(a) sea horizontal; (b) tenga pendiente -1.

6. Calcula los máximos y mínimos, globales y locales, de cada función en el intervalo indicado

$$(a)\ x + \frac{4}{x^2} \text{ en } (0, \infty) \qquad (b)\ x^3 + 2x^2 + x - 3 \text{ en } [-2, 2] \qquad (c)\ x + \operatorname{sen}(3x) \text{ en } [-2, 2]\ .$$

Puede ser útil dibujar previamente las gráficas por ordenador.

7. Utiliza el teorema de Rolle para averiguar cuántas raíces reales tienen los siguientes polinomios

$$(a)\ 6x^5 + 13x - 1 \qquad (b)\ x^4 - 4x + 1 \qquad (c)\ x^3 - 3x + a = 0 \text{ en } [-1, 1].$$

Utiliza Bolzano para encontrar un intervalo donde estén las raíces, y el método de la bisección para estimar su valor. En c), determina sólo para qué valores de a existe exactamente 1 raíz.

8. Demuestra que $f(x) = (2 - x^2)/x^4$ cumple $f(1) = f(-1)$, pero $f'(x) \neq 0$ en $[-1, 1]$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

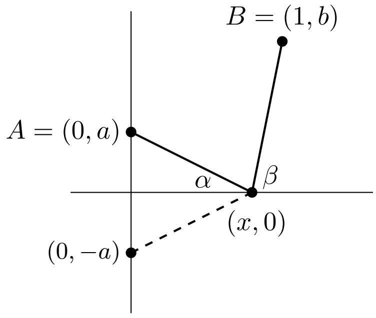
9. Utiliza el teorema del valor medio par probar que $\frac{1}{11} < \sqrt{102} - 10 < \frac{1}{10}$.

10. Demuestra las siguientes desigualdades

$$(a)\ \ln(1 + x) \ge x - x^3/3,\ \text{ si } x \ge 0 \qquad (b)\ (1 + x)^a \ge 1 + ax,\ \text{ si } x > -1 \quad \text{y } a \ge 1.$$

Ejercicios de optimización[1]

11. Se traza una recta desde el punto $A=(0,a)$ hasta el eje horizontal, y desde ahí otra hasta el punto $B=(1,b)$ como en la figura.



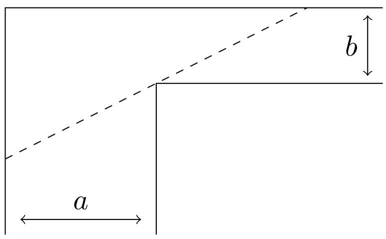
a) Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales

b) Calcular el valor de dicha longitud mínima y del punto x correspondiente.

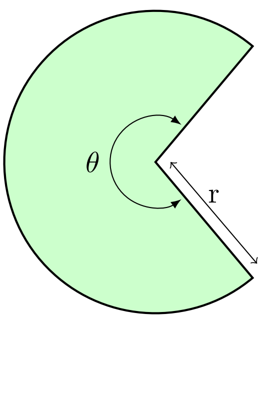
c) Piensa una situación práctica donde se tengan estas condiciones.

Sugerencia: expresar la longitud en función de x donde $(x,0)$ es el punto del eje horizontal. La línea de puntos sugiere una demostración geométrica; en cualquier caso, puede resolverse a) sin necesidad de calcular x. En c), puedes imaginar que el eje horizontal es un tendido de fibra óptica, desde el cual quiere hacerse una conexión a los puntos A y B que minimice la longitud de cable.

12. Dos pasillos, de anchuras respectivas a y b, forman un ángulo recto como en la figura. ¿Qué longitud máxima puede tener una escalera de mano para poder ser pasada horizontalmente de uno a otro pasillo?



13. Se proyecta un jardín en forma de sector circular, con un cierto radio r y ángulo interior θ. El área del jardín ha de ser fija A como en la figura. ¿Qué valores de r y θ hacen mínimo el perímetro que bordea al jardín?

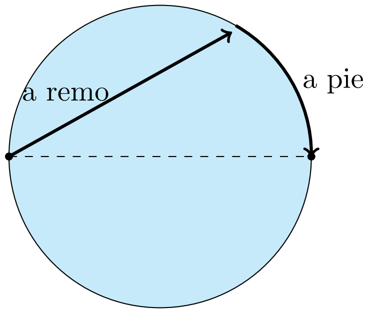


[1] Extraídos o adaptados del Spivak.

14. Queremos cruzar de un extremo a otro un lago circular de 1 km de radio, combinando un tramo a remo a 2 km/h y otro a pie a 4 km/h; ver figura. Determina qué recorrido hacer para

    (i) ver el máximo de paisaje

    (ii) cruzar lo más rápido posible.



15. Se dobla el ángulo superior derecho de una tira de papel de modo que toque el lado inferior, como en la figura. Si la anchura de la tira es a y su longitud tan larga como se desee, demostrar que la longitud mínima de la señal de doblez es $\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}$.