Cálculo I. Grado en ciencia e ingeniería de datos *Curso 2022/23*

Hoja 5. Derivadas II

1. Queremos resolver la ecuación $e^{-x} = x$.

   a) Demuestra que hay una solución $x \in (0, 1)$, y justifica si es única.

   b) Demuestra que la recurrencia del método de Newton puede escribirse en este caso como

   $$x_{n+1} = (1 + x_n)/(1 + e^{x_n}).$$

   c) Aproxima el valor de x con 2 iteraciones. ¿Cuántos decimales exactos tiene x_2?

2. Utiliza el método de Newton con $f(x) = \tan(x/4) - 1$ para obtener una aproximación de π con 12 decimales.

3. Calcula los siguientes límites por el método que prefieras

   $$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log\big(\cos(2x)\big)}{\log\big(\cos(3x)\big)} \quad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x\big(1 - \cos(3x)\big)} \quad (c)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

4. Calcular los siguientes límites utilizando el polinomio de Taylor:

   $$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)^4}{(\log(1 + x) - x)^6} \quad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{\cos(2\,x) - 1} \quad (c)\ \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x) - \log(1 + x)^2}{x^2}$$

5. Hallar a, b tales que exista el siguiente límite (calculando su valor)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x + a\operatorname{sen}(x) + bx\cos(x)}{x^5}.$$

6. Sea f una función suficientemente derivable en un intervalo alrededor del 0. Supongamos que

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 + 3\,x - 5\,x^2}{x^3} = 0.$$

   Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

7. Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 (centrado en $a = 0$), para las siguientes funciones, indicando el tamaño del orden de error:

   $$(a)\ x\,\big(\log(1 + x)\big)^2 \quad (b)\ \frac{\cos x}{1 + x^2} \quad (c)\ \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \quad (d)\ \frac{1}{1 + x\operatorname{sen} x}$$

8. Utiliza el polinomio de Taylor para aproximar el valor de $\ln(0'8)$ con un error menor que 10^{-5}.

9. Utiliza un polinomio de Taylor de grado 2 para aproximar el valor de $\sqrt{16'2}$. Da una estimación del resto de Lagrange para ver cuántos decimales son exactos.