Hoja 6. Integrales

1. Practica el cálculo de integrales indefinidas, resolviendo algunas de las siguientes:

$$(a)\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad (b)\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (c)\int \frac{x^3}{(1+x^4)^3}\,dx$$
$$(d)\int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx \qquad (e)\int x\ln x\,dx \qquad (f)\int x^5\cos(x^2)\,dx$$
$$(g)\int \frac{dx}{(1-x)(1+2x)} \qquad (h)\int \frac{x^2+2}{x^2(x+1)}\,dx \qquad (i)\int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$$
$$(j)\int x^2 e^{-x}\,dx \qquad (k)\int \mathrm{sen}^2(4x)\,dx \qquad (l)\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

2. Utiliza el TFC (y la regla de la cadena) para hallar $F'(x)$ cuando $F(x)$ viene dada por

$$(a)\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^3} \quad (b)\int_0^{x^2} \frac{dt}{(1+t^2)^3} \quad (c)\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{(1+t^2)^3}$$

3. Sea f una función derivable que cumple

$$\int_0^x f(t)\,dt = -10 + x^2 + x\,\mathrm{sen}(2x) + \tfrac{1}{2}\cos(2x).$$

Calcula $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

4. Demuestra que $\displaystyle\int_0^x 2|t|\,dt = x|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Es esta función derivable en $x = 0$?

5. Un virus informático destruye ficheros sanos a una velocidad (instantánea) de $v(t) = t^2 + 10$ Mb/min. Determina $x(t) =$ Mb destruidos tras t min, y calcula su valor en $t = 30$ min. ¿Cuánto tiempo tardará en destruir la información de un ordenador con capacidad 1 Tb?

Nota: en la última pregunta puedes usar `solve` para resolver la ecuación.

6. Un batería de ordenador se descarga con velocidad $v(t) = -10e^{-0'1t}$ (con t en minutos).

a) Calcula $x(t) =$ carga de la batería tras t minutos, sabiendo que la carga inicial es 100.

b) ¿Qué carga quedará al cabo de 1 hora? ¿Cuándo bajará la carga por debajo del 15 %?

7. Calcula las siguientes integrales definidas

$$(a)\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8} \quad (b)\int_0^{\pi/2}(\cos x)^4\sin x\,dx \quad (c)\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \quad (d)\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$$

8. Calcula las siguientes áreas:

a) Bajo la parábola $f(x) = x(2-x)$ y sobre el eje x.

b) Entre las curvas $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 3 - x$.

c) Bajo la gráfica de $f(x) = \mathrm{sen}^2 x$, para $0 \le x \le 2\pi$.

d) Bajo la gráfica de $f(x) = 1/x^{1/4}$, para $0 < x \le 1$.

9. Determina la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias (sin calcularlas)

$$(a)\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad (b)\ \int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^{3/2}} \quad (c)\ \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx \quad (d)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x\,(1+\ln x)^p},\ p>0.$$

10. Sabiendo que $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$, calcula las siguientes integrales

$$(a)\ \int_0^\infty x^2\,e^{-x^2}\,dx \quad (b)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \quad (c)\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}}$$

11. Se define la función gamma de Euler como $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$, si $\alpha>0$.

a) justifica por qué la integral converge cuando $\alpha>0$

b) demuestra (integrando por partes) que $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, para todo $\alpha>0$, y deduce por inducción que $\Gamma(n+1)=n!$

c) calcula en términos de la función gamma

$$(a)\ \int_0^\infty e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx \quad (b)\ \int_0^\infty x^n\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,\ n\in\mathbb{N} \quad (c)\ \int_0^1 \frac{x^{b-1}\,dx}{\big(\log(1/x)\big)^{1-a}},\ a,b>0.$$

12. El número N de errores aleatorios que se producen durante el procesamiento de cierta señal tiene una distribución de probabilidad dada por la curva

$$f(x)=\frac{1}{4}\,xe^{-x/2},\quad 0<x<\infty,$$

es decir la Prob$(a\le N\le b)$ es igual al área bajo la gráfica de f entre $x=a$ y $x=b$.

a) Comprueba que el área total bajo la gráfica es 1.

b) Calcula la probabilidad de que haya menos de 3 errores.

c) Calcula el número medio de errores, dado por $\int_0^\infty x f(x)\,dx$.

d) Calcula el número mediano de errores, es decir a tal que Prob$(N\le a)=0'50$.

Ejercicios de ecuaciones diferenciales

13. Utiliza el método de separación de varibles para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(a)\ \frac{dx}{dt}=\frac{tx}{1+t^2},\quad x(0)=1 \qquad (b)\ \frac{dx}{dt}=x^2,\quad x(0)=1/10 \qquad (c)\ \frac{dx}{dt}=5-3x,\ x(0)=1.$$

14. La evolución de una población celular sigue un modelo logístico, dado por la ecuación

$$\frac{dx}{dt}=0'2x(5-x),$$

con $t=$ tiempo en horas. Si inicialmente $x(0)=1$:

a) Resuelve la ED cuando $x(0)=1$, dibuja la gráfica, y explica la evolución a largo plazo de la población

b) ¿En qué momento la población alcanzará el 90 % de su capacidad máxima?

c) Resuelve la ED cuando $x(0)=6$ y explica lo que observas.