Hoja 7. Series

1. Determina la convergencia o divergencia de las siguientes series positivas:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\,2^n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2n}{3n+1}\Big)^n \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^{n^3} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-1/n}}{2n+1}$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}} \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n^2+1} \qquad (i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$$

2. Determina para qué valores del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$ son convergentes las siguientes series

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(n+1)\,n^{\alpha}} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)^{\alpha} \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}$$

3. Calcula la suma explícita de las siguientes series

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n+1}}{n!} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n} \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{5^{n-1}}\Big)$$

$$(d)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n} \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

4. Considera la sucesión $a_n=\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}$, $n\geq 0$, donde $\lambda>0$ es un parámetro fijo.

   a) Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=1$

   b) Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty}n\,a_n=\lambda$

   c) Calcula las sumas $\sum_{n=0}^{\infty}n^2a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty}(n-\lambda)^2\,a_n$.

   d) La sucesión a_n se utiliza para modelizar la probabilidad de tener n usuarios por minuto en un servidor web. Suponiendo $\lambda=3$, calcula la probablidad de que entrén más de 6 usuarios.

5. **Verdadero o falso:** sea $a_n>0$

   a) si $\sum_n a_n$ converge entonces $\sum_n a_n^2$ también converge

   b) si $\sum_n a_n$ converge entonces $\sum_n a_n^p$ converge para todo $p>0$

   c) si $\sum_n a_n$ converge entonces $\sum_n \frac{1}{1+a_n}$ diverge

   d) Si existe $\lim a_n=L$ entonces $\sum_n\left(\frac{a_n}{2a_n+1}\right)^n$ converge

6. Determina la convergencia absoluta y/o condicional de las siguientes series alternadas

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{n+1} \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{2^n} \qquad (d)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^{3/2}+n}$$