Cálculo I. Grado en ciencia e ingeniería de datos *Curso 2022/23*

Práctica 1: Sucesiones

1. Escoge 3 apartados del Ejercicio 1 (Hoja 2) y

   (i) Dibuja las sucesiones

   (ii) Calcula los límites usando lenguaje simbólico

2. Escoge 3 recurrencias entre los ejercicios 4 al 7 (Hoja 2) y

   (i) Dibuja las sucesiones

   (ii) Observando la gráfica, determina el número de iteraciones necesario para estar a una distancia $< 10^{-3}$ del valor del límite.

3. Considera las sucesiones

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad c_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}, \quad d_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}.$$

   (i) Esboza las gráficas con ordenador y comprueba que todas convergen al número $e = 2'7182818...$

   (ii) Determina a partir de las gráficas qué sucesiones son monótonas.

   (iii) ¿Qué sucesión te parece que se aproxima más rápido al número e?

4. La fórmula de Stirling afirma que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} =: s(n).$$

   a) Dibuja ambas sucesiones y comprueba que así ocurre cuando $n \leq 30$

   b) Dibuja las sucesiones de errores absolutos y relativos,

$$e_1(n) := n! - s(n), \quad \text{y} \quad e_2(n) := n!/s(n).$$

   Describe lo que observas.

   c) Un teorema matemático dice que

$$e^{\frac{1}{12n+1}} < \frac{n!}{s(n)} < e^{\frac{1}{12n}}.$$

   Comprueba que en efecto así ocurre, tomando logaritmos y dibujando las tres sucesiones que se obtienen. Utiliza la escala usual y la escala logarítmica.

5. **La aplicación logística**. Considera la recurrencia

$$a_{n+1} \, = \, r \, a_n \, (1 - a_n),$$

donde $0 < r < 4$ en un parámetro fijo. Considera un valor inicial cualquiera $a_0 \in (0,1)$. Dibuja la gráfica de la sucesión para distintos valores de r, de modo que verifiques experimentalmente los siguientes fenómenos (que se pueden probar de forma teórica)

(i) Si $r \in (0,1)$, entonces $\lim a_n = 0$

(ii) Si $r \in (1,2)$, entonces $\lim a_n = 1 - \frac{1}{r}$ de forma monótona

(iii) Si $r \in (2,3)$, entonces $\lim a_n = 1 - \frac{1}{r}$ de forma oscilante

(iv) Si $r \in (3, 3'449)$ la sucesión tiene 2 ptos límite

(v) Conforme r crece en el intervalo $(3'449, 3'56995)$ el número de ptos límite se va duplicando

(vi) Si $r \in (3'56995, 4)$ entonces la sucesión tiene un comportamiento caótico.

En el caso (vi) comprueba que pequeños cambios en el dato incial a_0, pueden implicar grandes cambios en a_n cuando n crece.

Opcionales:

(vii) Trata de dibujar un diagrama de Feigenbaum, que para cada valor de $r \in (0,4)$, indica los puntos límite de la sucesión correspondiente. Puedes buscar información y códigos en internet.

(viii) Trata de dibujar un diagrama *cobweb*, que muestre gráficamente cómo se aproxima cada sucesión a sus puntos límite. En wikipedia, *cobweb plot* tienes algunos ejemplos, y puedes buscar más información y códigos en internet.

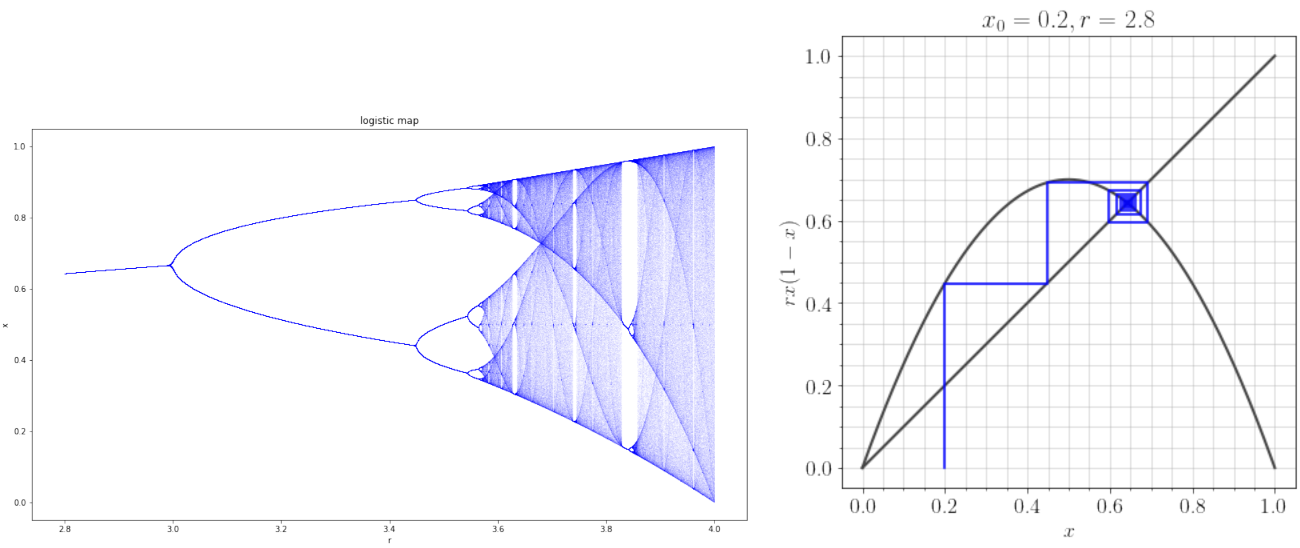

Figura 1: Diagrama de Feigenbaum (izda), y diagrama cobweb (dcha).