Cálculo I, 1$^{\text{o}}$ CC Datos

9 enero 2023

Nombre y DNI: ....

1. a) Demostrar por inducción:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   b) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$ converge y en su caso hallar su valor.

   Nota: 2 puntos

2. Dada una constante $a > 1$, se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recurrentemente por:

$$x_1 = a, \quad \text{y} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   (a) Demostrar que $x_n \geq \sqrt{a}$.

   (b) Demostrar que la sucesión es monótona decreciente.

   (c) Justificar la existencia del $\lim_{n\to\infty} x_n$ y calcular su valor.

   Nota: 2 puntos

3. a) Calcular el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3}{n^4}$.

   b) Estudiar la convergencia o divergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+9}\, dx$.

   Nota: 2 puntos

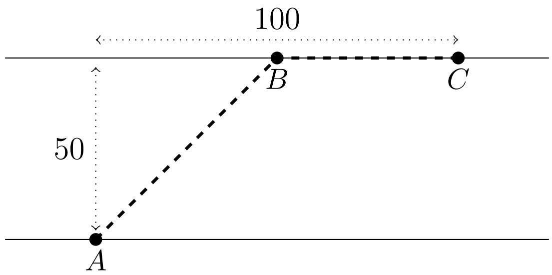
4. (a) Si $F(x) = \displaystyle\int_0^{e^{-x^2}} \frac{dt}{1 + (\ln t)^2}$, calcula $F'(x)$.

   (b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}{x}$.

   Observación: enuncia y justifica adecuadamente los teoremas que utilices.

   Nota: 2 puntos

5. Un bañista desea atravesar un río de 50 metros de ancho desde A hasta C como en la figura. Para ello decide nadar de A hasta algún punto B en la orilla opuesta, y después caminar desde B hasta C. Si nada a una velocidad de 3 Km/h y camina a 5 Km/h, demuestra que el tiempo mínimo para llegar desde A hasta C es de 2 minutos.



   Nota: 2 puntos

1.-

a) $P(n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Demostramos por inducción:

Si $n=1 \longrightarrow P(1) = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

Suponemos $P(n)$ cierto y comprobamos si se cumple para $P(n+1)$

$$P(n+1) = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-(n+2)\cdot 2 + n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} =$$

$$= 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$$ ✓

$\blacksquare$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^{-n}$

Probamos por el criterio de la raíz:

$$(n 2^{-n})^{1/n} = n^{1/n} 2^{-1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$ ✓

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim \frac{\ln n}{n}} \overset{L'H}{=} \frac{1}{2} \cdot e^{\lim \frac{\frac{1}{n}}{1}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{e^0} = \frac{1}{2}$$

Para hallar el valor, como sabemos que $\boxed{S_N = 2 - \frac{n+2}{2^n}}$ y que

$\lim S_N = \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n}$ tenemos que:

↑ aptdo a !!

bien !!

$$\lim 2 - \frac{n+2}{2^n} = \lim 2 - \cancel{\lim} \overset{\to 0}{\frac{n+2}{2^n}} = 2$$ ✓

2

Si es monótona decreciente se cumple que

b) $x_{n+1} \leq x_n$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq x_n \iff \cancel{x_n} + \frac{a}{x_n} \leq \cancel{2} x_n \iff \frac{a}{x_n} \leq x_n \iff x_n^2 \geq a$$

$\iff x_n \geq \sqrt{a}$ $\boxed{}$

c) Como sabemos que ~~xnxn~~ x_n es monótona decreciente ~~(para comprobar que $\exists$ lím x_n debemos probar que x_n está acotada inferiormente)~~ y acotada inferiormente $\Rightarrow \exists \lim x_n$

por b)

por a)

Lo calculamos de la siguiente forma:

$\lim_{n\to\infty} x_n = L$, como $\lim x_{n+1} = \lim x_n$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$

$$\cancel{2}L = \cancel{L} + \frac{a}{L} \iff L^2 = a \iff L = \pm\sqrt{a}$$

Entonces $\begin{cases} \text{o bien } L = \sqrt{a} \\ \text{o bien } L = -\sqrt{a} \end{cases}$, pero $x_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow L = \sqrt{a}$

a) $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Longrightarrow$ probar $x_n \geq \sqrt{a}$

- $n = 1$, $x_1 = a \geq \sqrt{a} \iff a^2 \geq a \iff a > 1$ ✓

- Veamos x_{n+1},

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a} \iff \frac{x_n^2 + a}{x_n} \geq 2\sqrt{a}$$

$$\overset{(x_n > 0)}{\iff} x_n^2 + a \geq 2\sqrt{a}\cdot x_n \iff \underbrace{x_n^2 + a - 2\sqrt{a}\cdot x_n}_{(x_n - \sqrt{a})^2} \geq 0$$

que es cierto.

3 ⓐ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3}{n^4}$ ¡¡dem!

$n^4 \leftarrow$ CRECIENTE Y POSITIVA

USAMOS STOLZ $\longrightarrow \lim \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\cancel{1^3}+\cancel{3^3}+\cancel{5^3}+\dots+\cancel{(2(n-1)-1)^3}+(2n-1)^3) - (\cancel{1^3}+\cancel{3^3}+\cancel{5^3}+\dots+\cancel{(2(n-1)-1)^3})}{n^4-(n-1)^4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^3}{n^4-(n-1)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3-12n^2+6n}{\cancel{n^4}-(\cancel{n^4}-4n^3+6n^2-4n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3-12n^2+6n}{4n^3-6n^2+4n-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(8-\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(4-\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = \cancel{\lim_{n\to\infty}} \frac{8-\cancel{\frac{12}{\infty}}+\cancel{\frac{6}{\infty}}}{4-\cancel{\frac{6}{\infty}}+\cancel{\frac{4}{\infty}}-\cancel{\frac{1}{\infty}}} = 2$$

ⓑ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^2+9}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\alpha \frac{x}{x^2+9}\,dx$ 1- Calculamos la integral:

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,dx = \int \frac{x}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+9} = \ln|x^2+9| + C$$

Por lo que ahora queda:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\alpha \frac{x}{x^2+9}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \ln|x^2+9|\Big]_0^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty} \left[\ln|\alpha^2+9| - \ln|0^2+9|\right]$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left[\ln|\alpha^2+9| - \ln 9\right] = \lim_{\alpha\to\infty} \ln\frac{\alpha^2+9}{9} = \ln\frac{\infty+9}{9} = \infty$$

Por lo que la integral diverge.

4.-

a) Si $F(x) = \int_0^{e^{-x^2}} \frac{dt}{1+(\ln t)^2}$, calcula $F'(x)$

El TFC nos dice que si $F(x) = \int_0^x f(x)dx \Rightarrow F(x) \in D$ y $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = \int_0^{e^{-x^2}} \frac{dt}{1+(\ln t)^2} = \cancel{\left\{ \begin{array}{l} u = \ln t \Rightarrow e^u = t \\ du = \frac{1}{t}dt \Rightarrow dt = t\,du \end{array} \right\}} \quad \boxed{H(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+(\ln t)^2}}$$

$$\boxed{H(e^{-x^2}) = F(x)}$$

$$F'(x) = H'(e^{-x^2}) \cdot (-2x \cdot e^{-x^2})$$

$$\Rightarrow F'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \left[\frac{1}{1+(\ln t)^2} \right]_0^{e^{-x^2}} = \boxed{-2x \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{1}{1+(-x^2)^2}}$$

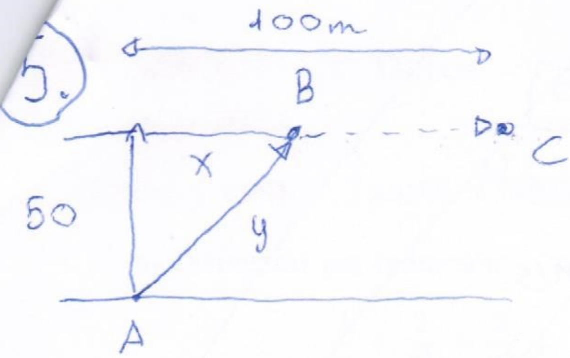
bien!

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right)'}{1} \overset{TFC}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \boxed{1}$$

(notar $\int_0^0 \frac{\sin t}{t} dt = 0$)

5.



Nada a una velocidad de $3 Km/h = \frac{5}{6}\ m/s$

Camina a una velocidad de $5 Km/h = \frac{25}{18}\ m/s$

Tenemos que $t = \frac{e}{v}$ $\qquad e = e_1 + e_2 \qquad e_1 = y = \sqrt{50^2 + x^2}$

$e_2 = 100 - x$

espacio $= y + 100 - x \Rightarrow$ espacio $= \sqrt{50^2 + x^2} + 100 - x$

$y = \sqrt{50^2 + x^2}$

$t_1 = \frac{e_1}{v_1} \quad t_2 = \frac{e_2}{v_2} \quad t_1 = \frac{\sqrt{50^2+x^2} \cdot 6}{5} \quad t_2 = \frac{(100-x) \cdot 18}{25}$

$T_T = \frac{\sqrt{50^2+x^2} \cdot 6}{5} + \frac{(100-x) \cdot 18}{25}$

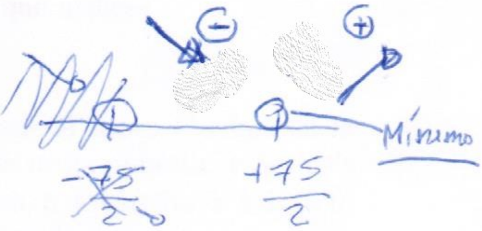
$T_T = \frac{30 \cdot \sqrt{50^2+x^2} + (100-x) \cdot 18}{25} = \frac{30\sqrt{50^2+x^2}}{25} + \frac{1800 - 18x}{25}$

$T'_T = \frac{30 \cdot \cancel{2}x}{25 \cdot \cancel{2}\sqrt{50^2+x^2}} - \frac{18}{25} = 0$

$30 \cdot x - 18 \cdot (\sqrt{50^2+x^2}) = 0 \rightarrow +18^2 \cdot (50^2 + x^2) = 900x^2$

$810000 + 324x^2 = 900x^2$

$\sqrt{\frac{810000}{576}} = \boxed{x = \pm\frac{75}{2}}$



x (que son metros no puede ser negativo)

$T_1 = \frac{\sqrt{50^2 + (\frac{75}{2})^2} \cdot 6}{5} \qquad T_2 = \frac{(100 - \frac{75}{2}) \cdot 18}{25}$

$T_1 = 75 \qquad T_2 = 45$

$T_1 + T_2 = 120$ segundos $= 2$ minutos

Es lo que tarda en recorrer de A a B y de B a C $\rightarrow$ osea de A a C

$x \in [0, 100]$, si comprobamos los valores frontera ($x = 0$ y $x = 100$) nos ~~ate~~ salen respectivamente 132 segundos (que es mayor a 2 minutos) y 134,164 que es también mayor a 2 minutos. Por lo que demostramos que el $x = \frac{75}{2}$, es un mínimo ~~go~~ y da ~~la distancia m~~ el tiempo mínimo posible que hemos demostrado que es 2 minutos.